Université de Liège
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Espaces compacts et séparés, équivalences et dualités

Simon Lemal

Projet pour le cours DOCU0044-1

Année académique 2020–2021

Je tiens à remercier Laurent De Rudder de m'avoir proposé ce sujet si intéressant, ainsi que pour sa relecture et ses conseils pertinents.

Table des matières

Introduction

Un résultat phare de la théorie des algèbres de Boole est le théorème de Stone, qui établit une dualité entre la catégorie des algèbres de Boole et celle des espaces de Stone. Dans ce travail, nous étudions quelques dualités et équivalences s'établissant de manière similaire, entre la catégorie des espaces compacts et séparés et d'autres catégories. Dans le dernier chapitre, ces dualités et équivalences sont étendues à des catégories plus générales, qui contiennent les catégories des premiers chapitres.

Prérequis

Une connaissance de base de la théorie des catégories est indispensable pour aborder ce travail. L'annexe A introduit toutes les notions de théorie de catégories nécessaires.

Les deux premiers chapitres requièrent d'être familier avec les notions de treillis et d'algèbres de Boole. L'annexe C établit les résultats nécessaires pour aborder ces deux chapitres.

Les deuxième et troisième chapitres utilisent également des résultats de topologie qui pourraient être méconnus du lecteur lambda. L'annexe B permettra au lecteur des combler ces lacunes.

Organisation de ce travail

Le premier chapitre présente une dualité entre la catégorie des espaces compacts et séparés et une catégorie de structures algébriques. Cette dualité apparaît très naturellement en topologie.

Le deuxième chapitre expose une seconde dualité entre la catégorie des espaces compacts et séparés et une catégorie inspirée des algèbres de Boole. Bien que cette dualité puisse sembler moins naturelle, nous verrons dans le chapitre suivant qu'elle a des applications intéressantes.

Le troisième chapitre introduit une équivalence purement topologique entre les espaces compacts et séparés et une autre catégorie d'espaces topologiques.

Dans le quatrième chapitre, les dualités et équivalences des chapitres précédents sont étendues à des catégories plus générales, dans le sens où elles contiennent plus de morphismes.

Conventions et notations

Tout au long de ce travail, nous désignerons une catégorie par une chaîne de caractère en gras, comme **BA** ou **KHaus**.

Nous dénoterons des objets d'une catégorie par des lettres majuscules. Nous utiliserons en général les lettres K, L, M pour les treillis, les lettres A, B, C pour les algèbres de Boole, les lettres X, Y, Z pour les espaces topologiques et les lettres $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, \mathbb{Z}$ pour les espaces de Gleason (espaces topologiques munis d'une relation).

Les lettres minuscules f, g, h représenteront toujours des morphismes d'une catégorie dont les morphismes sont des fonctions. Nous désignerons en général les isomorphismes par des lettres grecques. Cependant, les lettres ι et τ correspondront respectivement aux inclusions et projections, les lettres κ et π correspondront aux quotients. Lorsque nous travaillerons dans des catégories dont les morphismes sont des relations, nous dénoterons ces morphismes par R, R'.

Nous utiliserons des chaînes de caractères gothiques pour les foncteurs, par exemple $\mathfrak{RO}$ ou $\mathfrak{pt}$.

Les éléments d'une structure algébrique seront symbolisés par les lettres minuscules $a, b, c, \ldots$ et les éléments d'un espace topologique par les lettres minuscule x, y, z, t.

Un sous-ensemble arbitraire d'une structure sera noté S, un sous-ensemble fini T et un sous-ensemble dirigé D. Les lettres U, V, W seront utilisées pour les ouverts d'un espace topologique. Des idéaux d'un treillis seront dénotés par I, J et des filtres E, F, G.

Chapitre 1

Frames compacts et réguliers

Dans ce chapitre, nous présentons la catégorie des frames, qui apparaît naturellement lorsque l'on fait de la topologie sans point. La première section illustre le lien étroit qui existe entre les espaces topologiques et les frames. Ensuite, nous montrons qu'en se restreignant à des sous-catégories d'espaces topologiques et de frames, ce lien devient une dualité.

1.1 Frames et topologies

Dans cette section, nous commençons par introduire la notion de frame et illustrons le lien entre les frames et les espaces topologiques. Ensuite, nous démontrons des résultats plus avancés concernant les frames.

1.1.1 Topologie sans point

Les frames sont des structures algébriques permettant de modéliser les ouverts d'un espace topologique. Nous allons voir que de nombreuses propriétés d'un espace topologique se traduisent dans le frame de ses ouverts.

Définition 1.1. Un *frame* est un treillis complet L vérifiant

$$a \wedge \bigvee S = \bigvee \{a \wedge s : s \in S\} \tag{1.1}$$

pour tout $S \subset L$ et tout $a \in L$.

Un *homomorphisme de frames* est une application entre deux frames qui préserve les bornes inférieures finies et les bornes supérieures quelconques, i.e. $f\colon K \to L$ est un homomorphisme si

$$f\left(\bigwedge T\right) = \bigwedge f(T) \tag{1.2}$$

pour tout $T \subset K$ fini et

$$f\left(\bigvee S\right) = \bigvee f(S) \tag{1.3}$$

pour tout $S \subset K$ quelconque. En particulier, un homomorphisme de frames f est croissant et satisfait $f(1) = 1$, $f(0) = 0$, $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ et $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

On note **Frm** la catégorie dont les objets sont les frames et dont les morphismes sont les homomorphismes de frames.

Exemple. Si X est un espace topologique, l'ensemble des ses ouverts $\mathfrak{O}(X)$ ordonnés par inclusion est un frame. Si $f\colon X \to Y$ est une application continue, l'application

$$\mathfrak{O}(f)\colon \mathfrak{O}(Y) \to \mathfrak{O}(X) \quad U \mapsto f^{-1}(U) \tag{1.4}$$

est un homomorphisme de frame.

On peut vérifier que

$$\bigvee S = \bigcup S \quad \text{et} \quad \bigwedge S = \left(\bigcap S\right)^{\circ}. \tag{1.5}$$

pour tout $S \subset \mathfrak{O}(X)$. De plus

$$0 = \emptyset, \quad 1 = X \quad \text{et} \quad \bigwedge T = \bigcap T \tag{1.6}$$

pour tout $T \subset \mathfrak{O}(X)$ fini.

Ainsi, si **Top** désigne la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques et dont les morphismes sont les fonctions continues, $\mathfrak{O}$ est un foncteur contravariant de **Top** dans **Frm**.

Remarque 1.2. Dans la catégorie des frames, les objets initiaux sont les frames à deux éléments $\{0, 1\}$. Un frame de cette forme sera noté **2**.

Nous pouvons dès lors introduire des propriétés que peuvent satisfaire les frames. Nous verrons immédiatement que ces propriétés sont des traductions dans le langage des frames de propriétés topologiques.

Définition 1.3. Un frame L est *compact* si $S \subset L$ et $\bigvee S = 1$ implique qu'il existe $T \subset S$ fini tel que $\bigvee T = 1$.

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 1.4. *Un espace topologique X est compact si et seulement si le frame $\mathfrak{O}(X)$ est compact.*

Nous allons également donner une définition de régularité pour les frames, qui est le pendant de la régularité pour les espaces topologiques. Cependant, pour cela, nous avons besoin de quelques définitions préliminaires.

Définition 1.5. Étant donné un élément a d'un frame L, son *pseudo-complément* est

$$\neg a = \bigvee \{b \in L : a \wedge b = 0\}. \tag{1.7}$$

L'équation (1.1) implique que $a \wedge \neg a = 0$.

Remarque 1.6. Si $a \leq b$, alors $b \wedge c = 0$ implique $a \wedge c = 0$, donc

$$\{c \in L : b \wedge c = 0\} \subset \{c \in L : a \wedge c = 0\}$$

et $\neg b \leq \neg a$.

Comme $a \in \{b \in L : \neg a \wedge b = 0\}$, on a $a \leq \neg\neg a$.

Cette définition s'interprète facilement dans le cas d'un frame d'ouverts.

Proposition 1.7. *Étant donné un espace topologique X, on a, pour $U \in \mathfrak{O}(X)$,*

$$\neg U = U^{c\circ}. \tag{1.8}$$

Démonstration. En effet, on a

$$\neg U = \bigcup \{V \in \mathfrak{O}(X) : U \cap V = \emptyset\} = \bigcup \{V \in \mathfrak{O}(X) : V \subset U^c\} = U^{c\circ}.$$

■

Définition 1.8. Étant donné un frame L, on définit la relation *intérieur à*, notée $\prec$, par $a \prec b$ si et seulement si $\neg a \vee b = 1$.

À nouveau, dans un frame d'ouverts, cette définition peut s'interpréter différemment.

Proposition 1.9. *Étant donné un espace topologique X, on a, pour tous $U, V \in \mathfrak{O}(X)$,*

$$U \prec V \iff \overline{U} \subset V. \tag{1.9}$$

Démonstration. En effet, on a

$$U \prec V \iff U^{co} \cup V = X \iff V^c \subset \overline{U}^c \iff \overline{U} \subset V.$$

■

Nous pouvons maintenant définir la régularité pour les frames.

Définition 1.10. Un frame est *régulier* si

$$a = \bigvee \{b \in L : b \prec a\}. \tag{1.10}$$

Le résultat suivant est immédiat.

Proposition 1.11. *Un espace topologique X est régulier si et seulement si le frame $\mathfrak{O}(X)$ est régulier.*

À titre informatif, nous montrons que toutes les propriétés topologiques ne peuvent pas se traduire en propriétés sur les frames.

Exemple. Si X désigne l'espace topologique obtenu en mettant la topologie triviale sur un ensemble à un élément, et Y est l'espace topologique obtenu en mettant la topologie triviale sur un ensemble à strictement plus de un élément, nous pouvons remarquer que $\mathfrak{O}(X)$ et $\mathfrak{O}(Y)$ sont isomorphes. Cependant, X est séparé alors que Y ne l'est pas. Cet exemple montre qu'il n'est pas possible de définir une notion de frame séparé telle que X est séparé si et seulement si $\mathfrak{O}(X)$ est séparé.

Nous pouvons maintenant donner la définition de la catégorie des frames compacts et réguliers. Nous montrerons par la suite que cette catégorie est équivalente à la catégorie **KHaus** des espaces compacts et séparés.

Définition 1.12. On note **KRFrm** la catégorie dont les objets sont les frames compacts et réguliers et dont les morphismes sont les homomorphismes de frames.

En fait, nous avons déjà montré que $\mathfrak{O}$ est un foncteur contravariant de **KHaus** dans **KRFrm**.

1.1.2 Idéaux principaux premiers et maximaux

Tout comme pour les algèbres de Boole, on peut s'intéresser aux idéaux d'un frame. Cependant, comme les frames sont complets, les idéaux de frames ont une définition un peu différente de celle des idéaux d'algèbres. Nous verrons cependant que nombre des théorèmes portant sur les idéaux d'algèbres s'adaptent aisément aux idéaux de frames.

Définition 1.13. Un sous-ensemble non vide I d'un frame L est un *idéal principal* si

(I1) pour tout $S \subset I$, on a $\bigvee S \in I$,

(I2) si $a \leq b$ et $b \in I$, alors $a \in I$.

En particulier, $0 \in I$.

Un idéal principal I est *propre* si $I \neq L$, autrement dit si $1 \notin I$.

Un idéal principal propre I est *premier* si pour tous $a, b \in L$, $a \wedge b \in I$ implique $a \in I$ ou $b \in I$.

Un idéal principal propre est *maximal* s'il est maximal parmi les idéaux propres.

Remarque 1.14. Pour tout $a \in L$, l'ensemble ${\downarrow}a = \{b \in L : b \leq a\}$ est un idéal principal. Réciproquement, si I est un idéal principal, alors $I = {\downarrow}\bigvee I$. Ainsi, les idéaux principaux de L sont exactement les ensembles de la forme ${\downarrow}a$.

Remarque 1.15. Se donner un idéal premier de L revient à se donner un homomorphisme $L \to \mathbf{2}$. En effet, si I est un idéal premier,

$$p \colon L \to \mathbf{2} \quad x \mapsto x \notin I$$

est un homomorphisme. Si $p \colon L \to \mathbf{2}$ est un homomorphisme, alors $I = p^{-1}(0)$ est un idéal premier. En effet, I est stable par $\bigvee$ et par le bas si et seulement si p conserve $\bigvee$ et I est premier si et seulement si p conserve $\wedge$.

Le reste de cette section a pour but de fournir quelques résultats concernant les idéaux premiers ou maximaux. Ces résultats sont très similaires à ceux que l'on peut obtenir dans le cadre des algèbres de Boole.

Le résultat suivant est à mettre en parallèle avec le Théorème C.17.

Proposition 1.16. *Soient a et b des éléments d'un frame L. Si $a \not\leq b$, il existe un idéal premier I contenant b et ne contenant pas a.*

Démonstration. L'ensemble des idéaux principaux propres contenant b mais pas a est inductif (et non vide car il contient $\downarrow b$, qui est propre car $b \neq 1$). Ainsi, le lemme de Zorn nous garantit l'existence d'un idéal I maximal dans cet ensemble. Montrons qu'il est premier.

Un tel idéal s'écrit $I = \downarrow c$ pour un $c \in L$. Soient $x, y \in L$ tels que $x, y \notin I$ (qui équivaut à $x, y \not\leq c$). Alors $c \vee x \geq a$. En effet, $c \vee x \gneq c$ donc $\big\downarrow(c \vee x)$ est un idéal principal strictement plus grand que I et contient a. Pareillement $c \vee y \geq a$. Ainsi,

$$a \leq (c \vee x) \wedge (c \vee y) = c \vee (x \wedge y)$$

donc $x \wedge y \notin I$. L'idéal I est bien premier. ■

Corollaire 1.17. *Soient a et b des éléments d'un frame L. Si $a \not\leq b$, il existe un homomorphisme $p\colon L \to \mathbf{2}$ tel que $f(b) = 0$ et $f(a) = 1$.*

Nous pouvons maintenant formuler une condition nécessaire et suffisante pour qu'un idéal principal soit maximal ou premier. À nouveau, ce résultat est à comparer au Théorème C.16.

Proposition 1.18. *Soit I un idéal principal propre d'un frame régulier. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) L'idéal I est maximal.

(ii) L'idéal I est premier.

(iii) On a $a \in I$ si et seulement si $\neg b \notin I$ pour tout $b \prec a$.

Démonstration. (i) ⇒ (ii). Il suffit de procéder comme dans la preuve de la proposition précédente.

(ii) ⇒ (iii). Si $a \in I$, alors pour tout $b \prec a$, on a $\neg b \vee a = 1$ donc $\neg b \notin I$, puisque I est propre.

Soit a tel que $\neg b \notin I$ pour tout $b \prec a$. Si $\neg b \notin I$, alors $b \in I$ car $\neg b \wedge b = 0 \in I$ et I est premier. Ainsi

$$\{b \in L : b \prec a\} \subset I$$

donc $a \in I$ par régularité.

(iii) ⇒ (i). Soit J un idéal propre maximal contenant I. Comme J est premier, pour tout $a \in J$, on a $b \prec a$ implique $\neg b \notin J$. Or $\neg b \notin J$ implique $\neg b \notin I$. Ainsi $a \in I$ et $J \subset I$ donc I est maximal. ■

1.2 Dualité d'Isbell

Nous allons montrer que la catégorie **KHaus** est duale à la catégorie **KRFrm**. Tout d'abord, nous définissons le foncteur $\mathfrak{pt}$ de **KRFrm** dans **KHaus**, qui est l'inverse du foncteur $\mathfrak{O}$. Ensuite, nous montrons que ces foncteurs sont bien inverses l'un de l'autre. Cette construction est due à Isbell, qui l'a exposée dans [12].

1.2.1 Le foncteur $\mathfrak{pt}$

Nous commençons par définir le foncteur $\mathfrak{pt}$ de **KRFrm** dans **KHaus**.

Définition 1.19. Étant donné un frame L, $\mathfrak{pt}(L)$ désigne l'ensemble des points de L, i.e. l'ensemble des homomorphismes de L dans $\mathbf{2}$. On munit cet ensemble de la topologie $\{\phi(a) : a \in L\}$ où

$$\phi(a) = \{p \in \mathfrak{pt}(L) : p(a) = 1\}. \tag{1.11}$$

Remarque 1.20. Les éléments de $\mathfrak{pt}(L)$ sont bien les points de L dans la catégorie $\mathbf{KRFrm^{op}}$.

La proposition suivante montre que les $\phi(a)$ définissent bien une topologie.

Proposition 1.21. *Avec les notations de la définition précédente, on a*

$$\bigcup_{s\in S}\phi(s)=\phi\left(\bigvee S\right)\quad \textit{et}\quad \bigcap_{t\in T}\phi(t)=\phi\left(\bigwedge T\right) \tag{1.12}$$

pour tous $S\subset L$ et $T\subset L$ fini. En particulier, $\phi(0)=\emptyset$ et $\phi(1)=\mathfrak{pt}(L)$. Ainsi, $\{\phi(a) : a\in L\}$ définit bien une topologie.

Démonstration. En effet,

$$p\in\bigcup_{s\in S}\phi(s) \iff \exists s\in S,\, p(s)=1 \iff p\left(\bigvee S\right)=1 \iff p\in\phi\left(\bigvee S\right)$$

et

$$p\in\bigcap_{t\in T}\phi(t) \iff \forall t\in T,\, p(t)=1 \iff p\left(\bigwedge T\right)=1 \iff p\in\phi\left(\bigwedge T\right).$$

■

Nous définissons maintenant l'image par $\mathfrak{pt}$ d'un morphisme.

Définition 1.22. Étant donné un homomorphisme de frames $f\colon K\to L$, on définit l'application

$$\mathfrak{pt}(f)\colon \mathfrak{pt}(L)\to\mathfrak{pt}(K)\quad p\mapsto p\circ f. \tag{1.13}$$

Ce foncteur est bien défini. La fonction $\mathfrak{pt}(f)$ est continue, comme en atteste le résultat suivant.

Proposition 1.23. *Avec les notations introduites précédemment, on a*

$$\mathfrak{pt}(f)^{-1}(\phi(a))=\phi(f(a)). \tag{1.14}$$

En particulier, $\mathfrak{pt}(f)$ est continu.

Démonstration. En effet,

$$p\in\mathfrak{pt}(f)^{-1}(\phi(a)) \iff \mathfrak{pt}(f)(p)\in\phi(a) \iff p\circ f\in\phi(a) \iff p(f(a))=1 \iff p\in\phi(f(a)).$$

■

Il est évident que si $f\colon K\to L$ et $g\colon L\to M$, alors $\mathfrak{pt}(g\circ f)=\mathfrak{O}(f)\circ\mathfrak{O}(g)$. Nous avons donc montré que $\mathfrak{pt}$ est un foncteur contravariant de la catégorie des frames dans la catégorie des espaces topologiques.

Pour montrer que $\mathfrak{pt}(L)$ est compact lorsque L est compact, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.24. *La fonction ϕ définie en* (1.11) *est injective.*

Démonstration. En effet, si $a\neq b$, sans perte de généralité $b\not\leq a$ donc par le Corollaire 1.17 il existe un point p tel que $p(a)=0$ et $p(b)=1$. Alors $p\in\phi(b)$ mais $p\notin\phi(a)$. ■

Nous pouvons maintenant montrer que les frames compacts sont envoyés sur les espaces compacts.

Proposition 1.25. *Un frame L est compact si et seulement si l'espace topologique $\mathfrak{pt}(L)$ est compact.*

Démonstration. On a

$$\bigcup_{s\in S}\phi(s)=\mathfrak{pt}(L) \iff \phi\left(\bigvee S\right)=\phi(1) \iff \bigvee S=1.$$

Il est alors immédiat que la compacité de L est équivalente à la compacité de $\mathfrak{pt}(L)$. ■

Il reste à montrer que les frames réguliers sont envoyés sur des espaces séparés. Nous commençons par un lemme.

Lemme 1.26. *Soit a un élément d'un frame L. On a $\phi(a)^{-c} = \phi(\neg a)$. En particulier, $b \prec a$ si et seulement si $\phi(b)^{-} \subset \phi(a)$.*

Démonstration. Soit $p \in \phi(a)^{-}$, alors pour tout b tel que $p \in \phi(b)$, $\phi(b) \cap \phi(a) \neq \emptyset$. C'est équivalent à $p(b) = 1$ implique $a \wedge b \neq 0$. En effet, si $a \wedge b \neq 0$, il existe un idéal premier contenant $a \wedge b$ donc $\phi(a) \cap \phi(b) \neq \emptyset$ et s'il existe un idéal propre contenant a et b, alors $a \wedge b \neq 0$.

En prenant la contraposée, $a \wedge b = 0$ implique $p(b) = 0$, ce qui équivaut à

$$\bigvee \{p(b) : a \wedge b = 0\}) = 0$$

ou encore à

$$p\left(\bigvee \{b : a \wedge b = 0\}\right) = 0.$$

En se rappelant que

$$\neg a = \bigvee \{b : a \wedge b = 0\},$$

on a $p \in \phi(a)^{-}$ si et seulement si $p(\neg a) = 0$, i.e. si et seulement si $p \notin \phi(\neg a)$.

Pour le cas particulier, on a $b \prec a$ si et seulement si $a \vee \neg b = 1$. De plus, $\phi(b)^{-} \subset \phi(a)$ si et seulement si $\phi(b)^{-c} \cup \phi(a) = \mathfrak{pt}(L)$, ce qui équivaut encore à $\phi(a \vee \neg b) = \phi(1)$. Par l'injectivité de ϕ, les deux équations $a \vee \neg b = 1$ et $\phi(a \vee \neg b) = \phi(1)$ sont équivalentes. ■

La proposition suivante montre que les frames réguliers sont envoyés sur des espaces réguliers.

Proposition 1.27. *Un frame L est régulier si et seulement si l'espace topologique $\mathfrak{pt}(L)$ est régulier.*

Démonstration. L'espace topologique $\mathfrak{pt}(L)$ est régulier si et seulement si pour tout $a \in L$, on a

$$\phi(a) = \bigcup \{\phi(b) : \phi(b)^{-} \subset \phi(a)\} = \bigcup \{\phi(b) : b \prec a\} = \phi\left(\bigvee \{b : b \prec a\}\right),$$

ce qui équivaut à $a = \bigvee \{b : b \prec a\}$ vu l'injectivité de ϕ. ■

Bien que le résultat précédent soit intéressant, il n'est pas suffisant pour montrer la dualité entre **KHaus** et **KRFrm**. Le résultat suivant permet donc de le renforcer.

Proposition 1.28. *Si L est un frame régulier, alors l'espace topologique $\mathfrak{pt}(L)$ est séparé.*

Démonstration. Si p et q sont deux points distincts, sans perte de généralité, il existe $a \in L$ tel que $p(a) = 0$ et $q(a) = 1$. Comme $a = \bigvee \{b : b \prec a\}$, il existe $b \prec a$ avec $q(b) = 1$. Par la Proposition 1.18 appliquée à l'idéal premier $p^{-1}(0)$, on a $p(\neg b) = 1$. On a alors $p \in \phi(\neg b)$, $q \in \phi(b)$ et

$$\phi(\neg b) \cap \phi(b) = \phi(\neg b \wedge b) = \phi(0) = \emptyset.$$

L'espace est donc séparé. ■

Ceci montre que le foncteur $\mathfrak{pt}$ se restreint de **KRFrm** dans **KHaus**.

1.2.2 Dualité

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'équivalence duale entre les deux catégories.

Théorème 1.29 (Isbell)**.** *La catégorie* **KRFrm** *est duale à la catégorie* **KHaus**.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $\mathfrak{pt}$ et $\mathfrak{O}$ sont inverses l'un de l'autre. Si L est un frame compact et régulier, $\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(L))$ est le frame des ouverts de $\mathfrak{pt}(L)$, qui n'est autre que $\{\phi(a) : a \in L\}$ muni de l'union et de l'intersection. Comme la Proposition 1.21 nous l'indique,

$$\phi \colon L \to \mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(L)) \quad a \mapsto \phi(a)$$

est un homomorphisme de frames. Il est surjectif par définition de la topologie sur $\mathfrak{pt}(L)$ et injectif par le Lemme 1.24.

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{pt}"] \arrow[dd, bend right=60, "\phi"'] & L \arrow[d, dashed, "\mathfrak{pt}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\phi"] \\
\mathfrak{pt}(K) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{O}"] & \mathfrak{pt}(L) \arrow[l, "\mathfrak{pt}(f)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{O}"'] \\
\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(K)) \arrow[r, "\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(f))"] & \mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(L))
\end{tikzcd}
$$

(a) Isomorphie pour $\mathfrak{O} \circ \mathfrak{pt}$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{O}"] \arrow[dd, bend right=60, "\theta"'] & Y \arrow[d, dashed, "\mathfrak{O}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\theta"] \\
\mathfrak{O}(X) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{pt}"] & \mathfrak{O}(Y) \arrow[l, "\mathfrak{O}(f)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{pt}"'] \\
\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(X)) \arrow[r, "\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(f))"] & \mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(Y))
\end{tikzcd}
$$

(b) Isomorphie pour $\mathfrak{pt} \circ \mathfrak{O}$

FIGURE 1.1 – Composition des foncteurs $\mathfrak{pt}$ et $\mathfrak{O}$

De plus, si $f\colon K \to L$ est un homomorphisme,

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(f))(\phi(a)) = (\mathfrak{pt}(f))^{-1}(\phi(a)) = \{p \in \mathfrak{pt}(L) : (p \circ f)(a) = 1\} = \phi(f(a))$$

donc $\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(f)) \circ \phi = \phi \circ f$ et le diagramme 1.1a commute.

Si X est un espace topologique, $\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(X))$ est une collection de fonctions d'ouverts de X. Si $p\colon \mathfrak{O}(X) \to \mathbf{2}$ est un point, on définit $I = p^{-1}(0)$ et $F^c = \bigcup I$. L'ensemble F est un fermé non vide (car I est propre) et $I = \{U \in \mathfrak{O}(X) : U \subset F^c\}$ (vu la Remarque 1.14).

On définit

$$
\begin{aligned}
\theta\colon X &\to \mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(X)) \\
x &\mapsto \theta(x)\colon \quad \begin{aligned}[t] \mathfrak{O}(X) &\to \mathbf{2} \\ U &\mapsto x \in U. \end{aligned}
\end{aligned}
$$

Alors, pour tout $x \in F$, on a $I \subset \theta(x)^{-1}(0)$. Comme un idéal premier est maximal et $\theta(x)^{-1}(0)$ est propre, on a $I = \theta(x)^{-1}(0)$ donc θ est surjectif. Comme X est séparé, il est clair que θ est injectif.

L'application θ est continue. En effet, un ouvert de $\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(X))$ s'écrit $\phi(U)$ où U est un ouvert de X et

$$\theta^{-1}(\phi(U)) = \{x \in X : \theta(x) \in \phi(U)\} = \{x \in X : \theta(x)(U) = 1\} = \{x \in X : x \in U\} = U.$$

Ainsi θ est un homéomorphisme car c'est une bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé.

Si $f\colon X \to Y$ est une application continue, on a

$$\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(f))(\theta(x)) = \theta(x) \circ \mathfrak{O}(f)$$

et

$$\theta(x) \circ \mathfrak{O}(f)(U) = \theta(x)(f^{-1}(U)) = x \in f^{-1}(U) = f(x) \in U = \theta(f(x))(U).$$

Donc $(\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(f)) \circ \theta = \theta \circ f$ et le diagramme 1.1b commute également. ■

Chapitre 2

Algèbres de de Vries

Dans ce chapitre, nous démontrons une deuxième dualité entre la catégorie **KHaus** et une catégorie de structures algébriques, les algèbres de de Vries. Ces structures ont été introduites par de Vries dans sa thèse [7] pour résoudre des problèmes de compactifications d'espaces topologiques. La première section introduit la catégorie des algèbres de de Vries. La deuxième section montre la dualité entre cette catégorie et la catégorie **KHaus**. Dans la troisième, nous utilisons cette dualité pour établir la dualité de Stone dans le cas des algèbres de Boole complètes.

2.1 Algèbres de Boole et compingences

Dans cette section, nous introduisons les algèbres de de Vries, leurs morphismes et leurs filtres et démontrons des résultats découlant de ces définitions.

2.1.1 Relations de compingence

Les algèbres de de Vries sont des algèbres de Boole complètes munies de relations particulières.

Définition 2.1. Une relation de *compingence* sur une algèbre de Boole complète B est une relation $\prec$ satisfaisant

(DV1) $1 \prec 1$,

(DV2) $a \prec b$ implique $a \leq b$,

(DV3) $a \leq b \prec c \leq d$ implique $a \prec d$,

(DV4) $a \prec b, c$ implique $a \prec b \wedge c$,

(DV5) $a \prec b$ implique $\neg b \prec \neg a$,

(DV6) $a \prec b$ implique qu'il existe c tel que $a \prec c \prec b$, (interpolation)

(DV7) $a \neq 0$ implique qu'il existe $b \neq 0$ tel que $b \prec a$.

Une *algèbre de de Vries* est une algèbre de Boole complète B munie d'une relation de compingence.

Le résultat suivant découle de la définition.

Proposition 2.2. *Une algèbre de de Vries satisfait aux propriétés suivantes.*

(i) $0 \prec 0$,

(ii) $0 \prec a \prec 1$,

(iii) $a \prec b \prec c$ *implique* $a \prec c$,

(iv) $a, b \prec c$ *implique* $a \vee b \prec c$,

(v) $a \neq 1$ *implique qu'il existe* $b \neq 1$ *tel que* $a \prec b$,

(vi) $a \prec b$ *et* $c \prec d$ *impliquent* $a \wedge c \prec b \wedge d$.

Démonstration. (i), (iv), (v) s'obtiennent en combinant (DV5) avec les différentes lois de la définition.
Pour (ii), on a $0 \prec 0 \leq a \leq 1 \prec 1$.
(iii) s'obtient en remarquant que $a \prec b \prec c$ implique $a \leq b \prec c$ donc $a \prec c$.
(iv) est vrai car $a \wedge c \leq a \prec b$ et $a \wedge c \leq c \prec d$ donc $a \wedge c \prec b, d$. ■

Les deux résultats qui suivent seront utiles par la suite.

Proposition 2.3. *Soient a, b des éléments d'une algèbre de de Vries B. On a $a \leq b$ si et seulement si $c \prec a$ implique $c \prec b$ pour tout $c \in B$.*

Démonstration. La nécessité est directe puisque $c \prec a \leq b$ implique $c \prec b$. Pour la suffisance, supposons $a \not\leq b$. Alors $a \wedge \neg b \neq 0$ donc il existe $c \neq 0$ tel que $c \prec a \wedge \neg b$. On a $c \prec a$ donc $c \prec b$ par hypothèse. Or $c \prec \neg b$ donc $c \prec b \wedge \neg b = 0$, ce qui contredit le choix de c. ■

Proposition 2.4. *Soit a un élément d'une algèbre de de Vries B. On a $a = \bigvee\{b \in B : b \prec a\}$.*

Démonstration. Soit $a' = \bigvee\{b : b \prec a\}$. Il est évident que $a' \leq a$. Pour montrer que $a \leq a'$, supposons que $b \prec a$. Alors il existe $c \in B$ tel que $b \prec c \prec a$. On a $c \leq a'$ donc $b \prec a'$. Par la proposition précédente, $a \leq a'$. ■

2.1.2 Morphismes

Nous allons maintenant définir les morphismes d'algèbres de de Vries.

Définition 2.5. Un *morphisme d'algèbres de de Vries* est une application $f \colon A \to B$ tel que

(M1) $f(0) = 0$,

(M2) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$,

(M3) $a \prec b$ implique $\neg f(\neg a) \prec f(b)$,

(M4) $f(a) = \bigvee\{f(b) : b \prec a\}$.

Étant donné des morphismes $f \colon A \to B$ et $g \colon B \to C$, on définit leur composition par

$$(g * f)(a) = \bigvee\{g(f(b)) : b \prec a\}. \tag{2.1}$$

Il faut bien sûr vérifier que la composition est bien définie. Pour montrer cela, nous commençons par un lemme.

Lemme 2.6. *Un morphisme d'algèbres de de Vries $f \colon A \to B$ satisfait aux conditions suivantes.*

(i) $f(a) \leq \neg f(\neg a)$,

(ii) $a \prec b$ *implique* $f(a) \prec f(b)$,

(iii) $a \leq b$ *implique* $f(a) \leq f(b)$,

(iv) $a \prec c$ *et* $b \prec d$ *impliquent* $f(a \vee b) \prec f(c) \vee f(d)$.

Démonstration. (i) On a

$$0 = f(0) = f(a \wedge \neg a) = f(a) \wedge f(\neg a)$$

donc $f(a) \leq \neg f(\neg a)$.

(ii) C'est évident, on a $f(a) \leq \neg f(\neg a) \prec f(b)$.

(iii) On a

$$f(a) = f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

donc $f(a) \leq f(b)$.

(iv) On a $\neg f(c) \prec f(\neg a)$ et $\neg f(d) \prec f(\neg b)$ donc

$$\neg(f(c) \vee f(d)) = \neg f(c) \wedge \neg f(d) \prec f(\neg a) \wedge f(\neg b) = f(\neg a \wedge \neg b) = f(\neg(a \vee b)).$$

Par le premier point, $f(\neg(a \vee b)) \leq \neg f(a \vee b)$ donc $\neg(f(c) \vee f(d)) \prec \neg f(a \vee b)$.

■

Nous pouvons maintenant montrer que les morphismes d'algèbres de de Vries avec la composition forment bien une catégorie.

Proposition 2.7. *Soient f, g, h des morphismes tels que les compositions $g * f$ et $h * g$ aient un sens. Alors*

(i) $\mathrm{id}\colon B \to B$ *est un morphisme,*

(ii) $g * f$ *est un morphisme,*

(iii) $\mathrm{id} * f = f = f * \mathrm{id}$,

(iv) $(h * g) * f = h * (g * f)$.

Démonstration. (i) Les conditions $\mathrm{id}(0) = 0$ et $\mathrm{id}(a \wedge b) = a \wedge b = \mathrm{id}(a) \wedge \mathrm{id}(b)$ sont triviales. On a $\neg \mathrm{id}(\neg a) = a$ donc $a \prec b$ implique $\neg \mathrm{id}(\neg a) \prec b$. Finalement, $\mathrm{id}(a) = \bigvee\{\mathrm{id}(b) : b \prec a\}$ par la Proposition 2.4.

(ii) Il suffit de vérifier les propriétés de la définition. La condition (M1) est vérifiée car

$$(g * f)(0) = \bigvee\{g(f(b)) : b \prec 0\} = g(f(0)) = 0.$$

Montrons que (M2) est vérifiée. On a

$$(g * f)(a \wedge b) = \bigvee\{g(f(c)) : c \prec a \wedge b\}.$$

Or $c \prec a \wedge b$ si et seulement si $c = d \wedge e$ avec $d \prec a$ et $e \prec b$ [1]. Ainsi

$$(g * f)(a \wedge b) = \bigvee\{g(f(d \wedge e)) : d \prec a, e \prec b\} = \bigvee\{g(f(d)) \wedge g(f(e)) : d \prec a, e \prec b\}.$$

En utilisant la distributivité, on a

$$(g * f)(a \wedge b) = \left(\bigvee\{g(f(d)) : d \prec a\}\right) \wedge \left(\bigvee\{g(f(e)) : e \prec b\}\right) = (g * f)(a) \wedge (g * f)(b).$$

La condition (M3) est vérifiée. Si $a \prec b$, on a

$$\neg(g * f)(\neg a) = \bigwedge\{\neg g(f(c)) : c \prec \neg a\} = \bigwedge\{\neg g(f(\neg c)) : a \prec c\}.$$

Prenons $c, d \in A$ tels que $a \prec c \prec d \prec b$. Alors $\neg f(\neg c) \prec f(d)$ donc

$$\neg g(f(\neg c)) = \neg g(\neg\neg f(\neg c)) \prec g(f(d)).$$

Or

$$\neg(g * f)(\neg a) \leq \neg g(f(\neg c)) \quad \text{et} \quad (g * f)(b) \geq g(f(d))$$

donc $\neg(g * f)(\neg a) \prec (g * f)(b)$.

Finalement, pour vérifier (M4), on a

$$\bigvee\{(g * f)(b) : b \prec a\} = \bigvee\left\{\bigvee\{g(f(c)) : c \prec b\} : b \prec a\right\} = \bigvee\{g(f(c)) : c \prec b \prec a\}.$$

Par interpolation, on a

$$\bigvee\{(g * f)(b) : b \prec a\} = \bigvee\{g(f(c)) : c \prec a\} = (g * f)(a).$$

(iii) En effet,

$$\left.\begin{matrix}(\mathrm{id} * f)(a) \\ (f * \mathrm{id})(a)\end{matrix}\right\} = \bigvee\{f(b) : b \prec a\} = f(a).$$

1. En effet, si $c \prec a \wedge b$, alors $c = c \wedge c$ avec $c \prec a, b$. Si $d \prec a$ et $e \prec b$, alors $c = d \wedge e \prec a \wedge b$.

(iv) Nous allons montrer que

$$((h*g)*f)(a) = \underbrace{\bigvee\{h(g(f(d))) : d \prec a\}}_{h*g*f(a)} = (h*(g*f))(a).$$

En effet, d'une part

$$((h*g)*f)(a) = \bigvee\{(h*g)(f(b)) : b \prec a\} = \bigvee\left\{\bigvee\{h(g(c)) : c \prec f(b)\} : b \prec a\right\}.$$

Si $c \prec f(b)$ et $b \prec a$, alors $h(g(c)) \prec h(g(f(b)))$ donc $((g*h)*f)(a) \leq h*g*f(a)$.
Si $d \prec a$, il existe $b \in B$ tel que $d \prec b \prec a$ donc si $c = f(d)$, on a

$$h(g(f(d))) = h(g(c)) \leq ((h*g)*f)(a)$$

puisque $c \prec f(b)$ et $b \prec a$. Ainsi $h*g*f(a) \leq ((h*g)*f)(a)$.
D'autre part,

$$(h*(g*f))(a) = \bigvee\{h(g*f(b)) : b \prec a\} = \bigvee\left\{h\left(\bigvee\{g(f(c)) : c \prec b\}\right) b \prec a\right\}.$$

Si $b \prec a$ alors $\bigvee\{g(f(c)) : c \prec b\} \leq g(f(b))$ donc $(h*(g*f))(a) \leq h*g*f(a)$.
Si $d \prec a$, soit $b \in B$ tel que $d \prec b \prec a$. Alors $g(f(d)) \leq \bigvee\{gf(c)) : c \prec b\}$ donc

$$h(g(f(d))) \leq h\left(\bigvee\{g(f(c)) : c \prec b\}\right) \leq (h*(g*f))(a).$$

Ainsi $h*g*f(a) \leq (h*(g*f))(a)$.

■

Étant donné la définition particulière de la composition, il n'est pas acquis qu'un isomorphisme soit bijectif. Nous donnons tout de même une condition suffisante pour qu'un morphisme bijectif soit un isomorphisme. Cette condition sera utile par la suite.

Proposition 2.8. *Un morphisme bijectif $f\colon A \to B$ tel que $f(a) \prec f(b)$ implique $a \prec b$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Montrons d'abord que f^{-1} est un morphisme. Comme $f(0) = 0$, on a $0 = f^{-1}(f(0)) = f^{-1}(0)$. Si $c, d \in B$, soient $a, b \in A$ tels que $f(a) = c, f(b) = d$. Alors $f(a \wedge b) = c \wedge d$ donc $f^{-1}(c) \wedge f^{-1}(d) = a \wedge b = f^{-1}(c \wedge d)$. Si $c \prec d$, alors $f(a) \prec f(b)$ donc $f^{-1}(c) = a \prec b = f^{-1}(d)$. Finalement,

$$\bigvee\{f^{-1}(d) : d \prec c\} = \bigvee\{f^{-1}(d) : f^{-1}(d) \prec f^{-1}(c)\} = \bigvee\{b : b \prec f^{-1}(c)\} = f^{-1}(c).$$

On a $f * f^{-1} = \mathrm{id}$ et $f^{-1} * f = \mathrm{id}$ car

$$f * f^{-1}(c) = \bigvee\{f(f^{-1}(d)) : d \prec c\} = \bigvee\{d : d \prec c\} = c$$

et

$$f^{-1} * f(a) = \bigvee\{f^{-1}(f(b)) : b \prec a\} = \bigvee\{b : b \prec a\} = a.$$

■

Nous pouvons maintenant définir la catégorie des algèbres de de Vries. Nous montrerons dans la section suivante qu'elle est équivalente à la catégorie **KHaus**.

Définition 2.9. On note **DeV** la catégorie dont les objets sont les algèbres de de Vries, dont les morphismes sont les morphismes d'algèbres de de Vries et pour laquelle la composition est donnée par l'équation (2.1).

Remarque 2.10. Dans la catégorie des algèbres de de Vries, les objets initiaux sont les objets initiaux des algèbres de Boole (i.e. les algèbres à deux éléments $\{0, 1\}$), munis de la relation $\prec = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ (c'est la seule relation de compingence possible). Une algèbre de de Vries de cette forme est notée **2**.

2.1.3 Filtres ronds maximaux

Il est naturel de s'intéresser aux filtres d'une algèbre de de Vries, puisqu'il s'agit en particulier d'une algèbre de Boole. Cependant, la relation de compingence permet d'ajouter des conditions sur les filtres.

Définition 2.11. Un *filtre* d'algèbre de de Vries est un filtre d'algèbre de Boole.

Un filtre F d'algèbre de de Vries est *rond* si pour tout $a \in F$, il existe $b \in F$ avec $b \prec a$. Dans la suite, nous abrégerons *filtre rond* par *frond*.

Un frond F est *maximal* s'il est propre et maximal parmi les fronds propres.

Remarque 2.12. Comme dans le cas des frames, se donner un morphisme d'algèbres de de Vries de B dans $\mathbf{2}$ revient à se donner un frond maximal de B. En effet, si F est un frond maximal, alors

$$p\colon B \to \mathbf{2} \quad x \mapsto x \in F$$

est un morphisme et si $p\colon B \to \mathbf{2}$ est un morphisme, alors $p^{-1}(1)$ est un frond maximal. En effet, $p(0) = 0$ si et seulement si $0 \notin F$, $p(a \wedge b) = p(a) \wedge p(b)$ si et seulement si F est stable par $\wedge$ et par le haut. De plus, $p(a) = \bigvee\{p(b) : b \prec a\}$ si et seulement si F est rond et finalement, $\neg p(\neg a) \prec p(b)$ pour $a \prec b$ si et seulement si $a \prec b$ implique $\neg a \in F$ ou $b \in F$.

À nouveau, nous allons obtenir des résultats similaires à ceux existant dans le cadre des algèbres de Boole.

Le résultat suivant et son corollaire correspondent au Théorème C.17 pour les algèbres de Boole.

Proposition 2.13. *Soit a un élément d'une algèbre de de Vries. Si $a \neq 0$, il existe un frond maximal contenant a.*

Démonstration. Des applications répétées de (DV7) montrent qu'il existe une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = a$ et $0 \neq a_{i+1} \prec a_i$ pour tout i. Alors

$$F = \{b \in B : a_i \prec b \text{ pour un } i \in \mathbb{N}\}$$

est un frond propre contenant a. En utilisant le lemme de Zorn, on montre qu'il existe un filtre rond maximal contenant a. ∎

Corollaire 2.14. *Soient a, b des éléments d'une algèbre de de Vries. Si $a \nleq b$, il existe un frond maximal contenant a et ne contenant pas b.*

Démonstration. Si $a \nleq b$, alors $a \wedge \neg b \neq 0$ donc il existe un frond maximal F contenant $a \wedge \neg b$. Évidemment $a \in F$ mais $b \notin F$ sinon $0 = b \wedge \neg b \in F$. ∎

Nous pouvons à nouveau donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un frond soit maximal. Ce résultat est similaire au Théorème C.16.

Proposition 2.15. *Soit F un frond propre d'une algèbre de de Vries. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) F est maximal.

(ii) Si $a \prec b$, alors $b \in F$ ou $\neg a \in F$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons avoir $a, b \in B$ tels que $\neg a \notin F$ et $a \prec b$. Définissons

$$G = \{x \in B : x \geq c \wedge d \text{ où } c, d \text{ vérifient } a \prec c \text{ et } d \in F\}.$$

L'ensemble G est un filtre car si $x, y \in G$, il existe c, c', d, d' avec $a \prec c, c'$ et $d, d' \in F$ tels que $x \geq c \wedge d$ et $y \geq c' \wedge d'$. Alors

$$x \wedge y \geq (c \wedge c') \wedge (d \wedge d').$$

Or $a \prec c \wedge c'$ et $d \wedge d' \in F$.

Le filtre G est rond car si $x \in G$ et c, d sont tels que $a \prec c$, $d \in F$, $x \geq c \wedge d$, il existe c', d' tels que $a \prec c' \prec c$ et $d' \prec d$ avec $d' \in F$ (F est rond). Alors $c' \wedge d' \in G$ et $c' \wedge d' \prec x$.

Le frond G est propre car si $0 \in G$, il existe $c \in B$ avec $a \prec c$ et $d \in F$ tels que $c \wedge d = 0$. Mais alors $d \leq \neg c \prec \neg a$, or $d \in F$ et $\neg a \notin F$.

Ainsi $F = G$ (puisque $F \subset G$ et F est maximal). Or $b \in G$ car $b = b \wedge 1$ avec $a \prec b$ et $1 \in F$ donc $b \in F$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Soit G un frond maximal contenant F. Montrons que $G \subset F$. Soit $b \in G$. Il existe $a \in G$ tel que $a \prec b$. Évidemment $\neg a \notin G$ sinon $a \wedge \neg a = 0 \notin G$. Ainsi $\neg a \notin F$ donc $b \in F$. ∎

2.2 Dualité de de Vries

Nous allons maintenant montrer la dualité entre les catégories **KHaus** et **DeV**. Cette dualité a été démontrée par de Vries dans sa thèse [7].

2.2.1 Le foncteur $\mathfrak{RO}$

Nous commençons par définir le foncteur $\mathfrak{RO}$ de **KHaus** dans **DeV**. Pour cela, nous montrons que si X est un espace topologique compact et séparé, alors le treillis de ses ouverts réguliers peut être muni d'une structure d'algèbre de de Vries.

Définition 2.16. Étant donné un espace topologique X, $\mathfrak{RO}(X)$ désigne le treillis complet de ses ouverts réguliers. Le treillis $\mathfrak{RO}(X)$ est en fait une algèbre de Boole.

Les deux propositions qui suivent montrent qu'il s'agit bien d'une algèbre de Boole.

Proposition 2.17. *Étant donné un espace topologique X, le treillis $\mathfrak{RO}(X)$ est un treillis complet complémenté. Si $S \subset \mathfrak{RO}(X)$, on a*

$$\bigvee S = \left(\bigcup S\right)^{-\circ} \quad \text{et} \quad \bigwedge S = \left(\bigcap S\right)^{\circ}. \tag{2.2}$$

On a également, pour tout $U \in \mathfrak{RO}(X)$,

$$0 = \emptyset, \quad 1 = X, \quad \neg U = U^{c\circ}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Le plus petit ouvert régulier contenant chacun des ouverts de S contient $(\bigcup S)^{-\circ}$, et cet ouvert est régulier car $E^{-\circ-\circ} = E^{-\circ}$ pour tout $E \subset X$. Le plus grand ouvert contenu dans chacun des ouverts de S est $(\bigcap S)^{\circ}$. Montrons qu'il est régulier. Pour tout $U \in S$, on a $\bigcap S \subset U$ donc

$$\left(\bigcap S\right)^{\circ-\circ} \subset U^{\circ-\circ} = U,$$

donc $(\bigcap S)^{\circ-\circ}$ est inclus dans $\bigcap S$ et aussi dans son intérieur. L'autre inclusion est toujours vérifiée.

Il est évident que $\emptyset$ et X sont réguliers. Si U est régulier, $\neg U$ l'est aussi car

$$\neg U^{-\circ} = U^{c\circ-\circ} = U^{-\circ c\circ} = U^{c\circ}.$$

On a $U \cap \neg U = \emptyset$ donc $U \wedge \neg U = 0$ et

$$(U \cup \neg U)^{-} = \bar{U} \cup U^{c\circ-} = \bar{U} \cup U^{c} = X$$

donc $U \vee \neg U = 1$. ■

Proposition 2.18. *Étant donné un espace topologique X, le treillis $\mathfrak{RO}(X)$ est distributif.*

Démonstration. Remarquons d'abord que si U est ouvert et Y, Z sont tels que $\bar{Y} = \bar{Z}$, alors

$$(U \cap Y)^{-} = (U \cap Z)^{-}.$$

Soit $x \in (U \cap Y)^{-}$. Pour tout voisinage ouvert V de x, on a

$$U \cap V \cap Y \neq \emptyset.$$

Prenons y dans cet ensemble. Alors $y \in \bar{Y}$ donc $y \in \bar{Z}$. L'ouvert $U \cap V$ est un voisinage de y donc

$$U \cap V \cap Z \neq \emptyset.$$

Ainsi $x \in (U \cap Z)^{-}$. L'autre inclusion est identique. En prenant les complémentaires, on a que si F est fermé et Y, Z sont tels que $Y^{\circ} = Z^{\circ}$, alors $(F \cup Y)^{\circ} = (F \cup Z)^{\circ}$.

Remarquons ensuite que

$$(\bar{V} \cap \bar{W})^{\circ} = \bar{V}^{\circ} \cap \bar{W}^{\circ} = V \wedge W = (V \wedge W)^{-\circ}.$$

Ainsi
$$U \vee (V \wedge W) = (\bar{U} \cup (V \wedge W)^{-})^{\circ} = (\bar{U} \cup (\bar{V} \cap \bar{W}))^{\circ}$$
par les observations qui viennent d'être faites, donc
$$U \vee (V \wedge W) = ((\bar{U} \cup \bar{V}) \cap (\bar{U} \cup \bar{W}))^{\circ} = (U \cup V)^{-\circ} \cap (U \cup W)^{-\circ} = (U \vee V) \wedge (U \vee W).$$
Ainsi le treillis est bien distributif. ■

Nous définissons une relation de compingence sur l'algèbre de Boole.

Définition 2.19. Étant donné un espace topologique compact et séparé X, on munit $\mathfrak{RO}(X)$ de la relation de compingence définie par $U \prec V$ si $\bar{U} \subset V$.

La proposition suivante montre que $\mathfrak{RO}(X)$ est une algèbre de de Vries.

Proposition 2.20. *Si X est un espace compact et séparé, alors la relation $\prec$ qui vient d'être définie est une relation de compingence sur $\mathfrak{RO}(X)$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier chacun des axiomes de la Définition 2.1. Les quatre premiers sont triviaux.

Vérifions (DV5). Si $\bar{U} \subset V$, alors
$$(\neg V)^{-} = V^{c\circ -} = V^{c} \subset U^{-c} = \neg U$$
donc $\neg V \prec \neg U$.

La condition (DV6) est équivalente à la normalité de X et la condition (DV7) est équivalente à la régularité. Il est bien connu qu'un espace compact et séparé est également normal et régulier donc la conclusion est immédiate. ■

Il nous reste à définir l'image d'un morphisme par $\mathfrak{RO}$.

Définition 2.21. Étant donné une application continue $f \colon X \to Y$ entre espaces topologiques compacts et séparés, on définit $\mathfrak{RO}(f) \colon \mathfrak{RO}(Y) \to \mathfrak{RO}(X)$ par $\mathfrak{RO}(f)(U) = f^{-1}(U)^{-\circ}$.

Vérifions que cette définition est licite.

Proposition 2.22. *L'application $\mathfrak{RO}(f)$ est un morphisme d'algèbres de de Vries.*

Démonstration. On a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ donc $\mathfrak{RO}(f)(\emptyset) = \emptyset^{-\circ} = \emptyset$. On a également
$$\mathfrak{RO}(f)(U \cap V) = (f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V))^{-\circ} = f^{-1}(U)^{-\circ} \cap f^{-1}(V)^{-\circ} = \mathfrak{RO}(f)(U) \cap \mathfrak{RO}(f)(V).$$
Si $\bar{U} \subset V$, alors $V^{c} \subset U^{-c}$ donc
$$f^{-1}(V)^{c} = f^{-1}(V^{c}) \subset f^{-1}(U^{-c}).$$
Ainsi
$$f^{-1}(U^{-c})^{c} \subset f^{-1}(V)$$
donc
$$f^{-1}(U^{-c})^{c\circ-\circ-} = f^{-1}(U^{-c})^{c\circ-} \subset f^{-1}(V)^{-\circ}.$$
Or
$$f^{-1}(U^{-c})^{c\circ-\circ} = \neg\mathfrak{RO}(f)(\neg U) \quad \text{et} \quad f^{-1}(V)^{-\circ} = \mathfrak{RO}(f)(V).$$
Finalement, pour tout ouvert U, on a $U = \bigcup\{V : V \prec U\}$ par régularité. Ainsi,
$$f^{-1}(U) = \bigcup\{f^{-1}(V) : V \prec U\}$$
donc
$$f^{-1}(U) = \bigcup\{f^{-1}(V)^{-\circ} : V \prec U\}.$$

L'inclusion $\subset$ est une conséquence directe de ce qui vient d'être montré et l'inclusion $\supset$ du fait que si $\bar{V} \subset U$, alors

$$f^{-1}(V)^{-\circ} \subset f^{-1}(V)^{-} \subset f^{-1}(\bar{V}) \subset f^{-1}(U).$$

On en déduit directement

$$f^{-1}(U)^{-\circ} = \bigcup\{f^{-1}(V)^{-\circ} : V \prec U\}^{-\circ}.$$

Or

$$f^{-1}(U)^{-\circ} = \mathfrak{RO}(f)(U),$$

et

$$\bigcup\{f^{-1}(V)^{-\circ} : V \prec U\}^{-\circ} = \bigvee\{\mathfrak{RO}(f)(V) : V \prec U\}.$$

■

La proposition suivante montre que $\mathfrak{RO}$ est un foncteur.

Proposition 2.23. *Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$ des applications continues entre espaces compacts et séparés, alors $\mathfrak{RO}(g \circ f) = \mathfrak{RO}(f) * \mathfrak{RO}(g)$.*

Démonstration. Soit $U \in \mathfrak{RO}(Z)$.

$$\mathfrak{RO}(g \circ f)(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))^{-\circ}$$

et

$$\mathfrak{RO}(f) * \mathfrak{RO}(g)(U) = \left(\bigcup\{f^{-1}(g^{-1}(V)^{-\circ})^{-\circ} : V \prec U\}\right)^{-\circ}.$$

Procédons par double inclusion. Si $V \prec U$, alors $V \subset \bar{V} \subset U$ donc

$$g^{-1}(V) \subset g^{-1}(\bar{V}) \subset g^{-1}(U).$$

L'ensemble $g^{-1}(\bar{V})$ est un fermé donc

$$g^{-1}(V)^{-\circ} \subset g^{-1}(\bar{V}) \subset g^{-1}(U).$$

Ainsi

$$f^{-1}(g^{-1}(V)^{-\circ}) \subset f^{-1}(g^{-1}(\bar{V})) \subset f^{-1}(g^{-1}(U))$$

donc

$$\mathfrak{RO}(f) * \mathfrak{RO}(g)(U) \subset \mathfrak{RO}(g \circ f)(U).$$

Pour l'autre inclusion, il suffit de montrer que

$$f^{-1}(g^{-1}(U)) \subset \bigcup\{f^{-1}(g^{-1}(V)^{-\circ})^{-\circ} : V \prec U\}.$$

Or si $x \in f^{-1}(g^{-1}(U))$, alors $g(f(x)) \in U$ donc il existe un ouvert régulier V tel que

$$g(f(x)) \in V \subset \bar{V} \subset U.$$

Alors $x \in f^{-1}(g^{-1}(V)^{-\circ})^{-\circ}$ avec $V \prec U$. ■

$\mathfrak{RO}$ est donc bien un foncteur contravariant de la catégorie **KHaus** dans la catégorie **DeV**.

2.2.2 Le foncteur $\mathfrak{end}$

Il nous faut maintenant définir un foncteur de **DeV** dans **KHaus**.

Définition 2.24. Étant donné une algèbre de de Vries B, $\mathfrak{end}(B)$ désigne l'ensemble de ses fronds maximaux. On munit cet ensemble de la topologie ayant pour base $\{\omega(a) : a \in B\}$ où

$$\omega(a) = \{E \in \mathfrak{end}(B) : a \in E\}. \tag{2.4}$$

Remarque 2.25. L'ensemble $\mathfrak{end}(B)$ correspond à l'ensemble des points de B dans la catégorie $\mathbf{DeV^{op}}$.

La proposition suivante montre que les $\omega(a)$ forment bien une base, et montre quelques propriétés de la topologie engendrée.

Proposition 2.26. *Avec les notations de la définition précédente, on a*

$$\bigcap_{t\in T} \omega(t) = \omega\left(\bigwedge T\right) \tag{2.5}$$

pour tout $T \subset B$ fini. En particulier, $\omega(1) = \mathfrak{end}(B)$. Ainsi, $\{\omega(a) : a \in B\}$ est bien une base.

Si $a \prec b$, alors $\omega(a)^- \subset \omega(b)$. De plus, $\omega(a)^{-c} = \omega(\neg a)$. Ainsi les $\omega(a)$ sont des ouverts réguliers. De plus

$$\left(\bigcup_{s\in S} \omega(s)\right)^{-\circ} = \omega\left(\bigvee S\right). \tag{2.6}$$

En particulier, $\omega(0) = \emptyset$. Finalement, les $\omega(a)$ sont les seuls ouverts réguliers.

Démonstration. On a

$$E \in \bigcap_{t\in T} \omega(t) \iff \forall t \in T, t \in E \iff \bigwedge T \in E \iff E \in \omega\left(\bigwedge T\right).$$

Si U est un ouvert, $E \in \bar{U}$ si et seulement si pour tout $c \in E$, on a $\omega(c) \cap U \neq \emptyset$, i.e. s'il existe un frond maximal $F \in U$ tel que $c \in F$. Ainsi $E \in \bar{U}$ si et seulement si $E \subset \bigcup U$.

Montrons maintenant que $a \prec b$ implique $\omega(a)^- \subset \omega(b)$. On a $E \in \omega(a)^-$ si et seulement si $E \subset \bigcup \omega(a)$. Ça implique que $\neg a \notin E$, car $\neg a \notin \bigcup \omega(a)$. Ainsi $b \in E$ pour tout $b \in B$ tel que $a \prec b$ par la Proposition 2.15. Donc $E \in \omega(b)$ et $\omega(a)^- \subset \omega(b)$.

Montrons que $\omega(a)^{-c} = \omega(\neg a)$. Si $E \in \omega(\neg a)$, alors $E \not\subset \bigcup \omega(a)$ car $\neg a \notin \bigcup \omega(a)$. Ainsi $\omega(\neg a) \subset \omega(a)^{-c}$. Si $E \in \omega(a)^{-c}$, alors $E \not\subset \bigcup \omega(a)$ donc il existe $b \in E$ tel que $b \notin \bigcup \omega(a)$. On a $a \wedge b = 0$, sinon il existerait un frond maximal contenant a et b, et on aurait $b \in \bigcup \omega(a)$. Ainsi $b \leq \neg a$ donc $\neg a \in E$.

Démontrons maintenant l'équation (2.6). Montrons d'abord que

$$\omega\left(\bigvee S\right) \subset \left(\bigcup_{s\in S} \omega(s)\right)^-.$$

Si $E \in \omega\left(\bigvee S\right)$, alors pour tout $c \in E$, on a $0 \neq c \wedge \bigvee S = \bigvee_{s\in S} c \wedge s$ donc il existe $s \in S$ tel que $c \wedge s \neq 0$. Il existe alors un filtre $F \in \omega(s)$ contenant c donc

$$c \in \bigcup \bigcup_{s\in S} \omega(s).$$

Ainsi $E \subset \bigcup \bigcup_{s\in S} \omega(s)$ donc

$$E \in \left(\bigcup_{s\in S} \omega(s)\right)^-.$$

Il est évident que $\left(\bigcup_{s\in S} \omega(s)\right) \subset \omega\left(\bigvee S\right)$. Ainsi

$$\omega\left(\bigvee S\right) \subset \left(\bigcup_{s\in S} \omega(s)\right)^{-\circ} \subset \omega\left(\bigvee S\right)^{-\circ}.$$

La conclusion résulte du fait que $\omega\left(\bigvee S\right)$ est un ouvert régulier.

Nous pouvons maintenant montrer que tous les ouverts réguliers sont des $\omega(a)$. Considérons un ouvert régulier U. Alors $U = \bigcup\{\omega(a) : \omega(a) \subset U\}$ donc

$$U = U^{-\circ} = \left(\bigcup\{\omega(a) : \omega(a) \subset U\}\right)^{-\circ} = \omega\left(\bigvee\{a : \omega(a) \subset U\}\right).$$

■

L'espace topologique ainsi défini est un objet de **KHaus**.

Proposition 2.27. *L'espace topologique* $\mathfrak{end}(B)$ *est compact et séparé.*

Démonstration. Montrons d'abord qu'il est séparé. Si E, F sont deux fronds maximaux distincts, soit $b \in E \setminus F$. Il existe $a \prec b$ tel que $a \in E$. Comme $b \notin F$, on a forcément $\neg a \in F$ par la Proposition 2.15. Ainsi $E \in \omega(a)$, $F \in \omega(\neg a)$ et $\omega(a) \cap \omega(\neg a) = \omega(0) = \emptyset$.

Avant de montrer que $\mathfrak{end}(B)$ est compact, nous montrons qu'il est régulier. Si U est un ouvert et $E \in U$ un frond, il existe $b \in E$ tel que $\omega(b) \subset U$, puis $a \prec b$ tel que $a \in E$. Alors

$$E \in \omega(a) \subset \omega(a)^{-} \subset \omega(b) \subset U.$$

Montrons maintenant que l'espace est compact. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fermés telle que $P, Q \in \mathcal{F}$ implique $P \cap Q \in \mathcal{F}$ et $\emptyset \notin \mathcal{F}$. Il suffit de montrer que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Soit

$$F = \{a \in B : \exists P \in \mathcal{F}, b \prec a \text{ tel que } P \subset \omega(b)\}.$$

Montrons que F est un filtre rond. Si $a \leq c$ et $a \in F$, on a $c \in F$ car $b \prec a \leq c$ implique $b \prec c$. Si $a, a' \in F$, alors il existe $P, P' \in \mathcal{F}$, $b \prec a$ et $b' \prec a'$ tels que $P \subset \omega(b)$ et $P' \subset \omega(b')$. Alors $P \cap P' \in \mathcal{F}$, $b \wedge b' \prec a \wedge a'$ et $P \cap P' \subset \omega(b \wedge b')$ donc $a \wedge a' \in F$. Ainsi F est un filtre.

Si $a \in F$, il existe $b \prec a$ et $P \in \mathcal{F}$ tels que $P \subset \omega(b)$. Soit $c \in B$ tel que $b \prec c \prec a$. Alors $c \in F$ puisque $b \prec c$, donc F est bien rond.

Soit E un frond maximal contenant F (il suffit d'utiliser le lemme de Zorn). Nous allons montrer que $E \in \bigcap \mathcal{F}$. Supposons qu'il existe $P \in \mathcal{F}$ tel que $E \notin P$. Par régularité, il existe $b \in E$ tel que $\omega(b)^{-} \cap P = \emptyset$. Soit $a \prec b$ tel que $a \in E$. On a

$$P \subset \omega(b)^{-c} = \omega(\neg b).$$

Mais alors $\neg a \in F \subset E$ car $\neg b \prec \neg a$, ce qui contredit le fait que $a \in E$. ■

Il nous reste à définir l'image d'un morphisme par $\mathfrak{end}$.

Définition 2.28. Étant donné un morphisme $f \colon A \to B$ d'algèbres de de Vries, on définit

$$\mathfrak{end}(f) \colon \mathfrak{end}(B) \to \mathfrak{end}(A) \quad E \mapsto \{a \in A : f(b) \in E \text{ pour un } b \prec a\}. \tag{2.7}$$

Remarque 2.29. Si l'on travaille en terme de points, cela revient à associer au point $p \colon B \to \mathbf{2}$ le point $p * f \colon A \to \mathbf{2}$. On en déduit directement que $\mathfrak{end}(f)(E)$ est un frond maximal si E l'est et que $\mathfrak{end}(g * f) = \mathfrak{end}(f) \circ \mathfrak{end}(g)$.

Vérifions que $\mathfrak{end}(f)$ est continu.

Proposition 2.30. *Avec les notations introduites précédemment, on a*

$$\mathfrak{end}(f)^{-1}(\omega(a)) = \bigcup_{b \prec a} \omega(f(b)). \tag{2.8}$$

En particulier, $\mathfrak{end}(f)$ *est continu.*

Démonstration. En effet,

$$E \in \mathfrak{end}(f)^{-1}(\omega(a)) \iff \mathfrak{end}(f)(E) \in \omega(a) \iff a \in \mathfrak{end}(f)(E) \iff f(b) \in E \text{ pour un } b \prec a.$$

■

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{end}"] \arrow[dd, bend right=60, "\omega"'] & & B \arrow[d, dashed, "\mathfrak{end}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\omega"] \\
\mathfrak{end}(A) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{RO}"] & & \mathfrak{end}(B) \arrow[ll, "\mathfrak{end}(f)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{RO}"'] \\
\mathfrak{RO}(\mathfrak{end}(A)) \arrow[rr, "\mathfrak{RO}(\mathfrak{end}(f))"] & & \mathfrak{RO}(\mathfrak{end}(B))
\end{tikzcd}$$

(a) Isomorphie pour $\mathfrak{RO} \circ \mathfrak{end}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{RO}"] \arrow[dd, bend right=60, "\nu"'] & & Y \arrow[d, dashed, "\mathfrak{RO}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\nu"] \\
\mathfrak{RO}(X) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{end}"] & & \mathfrak{RO}(Y) \arrow[ll, "\mathfrak{RO}(f)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{end}"'] \\
\mathfrak{end}(\mathfrak{RO}(X)) \arrow[rr, "\mathfrak{end}(\mathfrak{RO}(f))"] & & \mathfrak{end}(\mathfrak{RO}(Y))
\end{tikzcd}$$

(b) Isomorphie pour $\mathfrak{end} \circ \mathfrak{RO}$

FIGURE 2.1 – Composition des foncteurs $\mathfrak{end}$ et $\mathfrak{RO}$

2.2.3 Dualité

Nous pouvons maintenant montrer la dualité entre **KHaus** et **DeV**.

Théorème 2.31 (de Vries)**.** *La catégorie* **DeV** *est duale à la catégorie* **KHaus***.*

Démonstration. Il faut vérifier que $\mathfrak{end}$ et $\mathfrak{RO}$ sont inverses l'un de l'autre. Si B est une algèbre de de Vries, $\mathfrak{RO}(\mathfrak{end}(B))$ est l'algèbre des ouverts réguliers de $\mathfrak{end}(B)$. Remarquons que

$$\omega \colon B \to \mathfrak{RO}(\mathfrak{end}(B)) \quad a \mapsto \omega(a)$$

est un morphisme d'algèbres de de Vries. Tout découle de la Proposition 2.26. En effet, elle implique que $\omega(0) = \emptyset$ et $\omega(a) \cap \omega(b) = \omega(a \wedge b)$. De plus, $\neg\omega(\neg a) = \omega(a)^{-c\circ} = \omega(a)$ donc $a \prec b$ implique $\neg\omega(\neg a) \prec b$. Ensuite

$$\omega(a) = \bigvee \{\omega(b) : b \prec a\}$$

car si un frond contient a, il contient un $b \prec a$. Finalement, ω est surjectif.

C'est une application injective car si $a \neq b$, sans perte de généralité $a \not\leq b$ et il existe un frond maximal contenant a mais pas b, donc $\omega(a) \neq \omega(b)$. Par la Proposition 2.8, ω est un isomorphisme.

Si $f \colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres de de Vries, on a

$$\mathfrak{RO}(\mathfrak{end}(f))(\omega(a)) = \mathfrak{end}(f)^{-1}(\omega(a))^{-\circ} = \{E \in \mathfrak{end}(B) : \mathfrak{end}(f)(E) \in \omega(a)\}^{-\circ}.$$

Or, on a

$$\mathfrak{end}(f)(E) \in \omega(a) \iff a \in \mathfrak{end}(f)(E) \iff f(b) \in E \text{ pour un } b \prec a$$

donc

$$\mathfrak{RO}(\mathfrak{end}(f))(\omega(a)) = \left(\bigcup \{\omega(f(b)) : b \prec a\}\right)^{-\circ} = \omega\left(\bigvee \{f(b) : b \prec a\}\right) = \omega(f(a))$$

vu l'équation (2.6). Ainsi le diagramme 2.1a commute.

Si X est un compact séparé, on définit

$$\begin{aligned} \nu \colon X &\to \mathfrak{end}(\mathfrak{RO}(X)) \\ x &\mapsto \{U \in \mathfrak{RO}(X) : x \in U\} \end{aligned}$$

L'ensemble $\nu(x)$ est l'ensemble des voisinages ouverts réguliers de x, c'est un frond maximal[2].

Soit $E \in \mathfrak{end}(\mathfrak{RO}(X))$. Alors

$$\bigcap E = \bigcap \{\bar{U} : U \in E\}$$

puisque pour tout $U \in E$, il existe $V \in E$ avec $\bar{V} \subset U$. L'intersection

$$\bigcap \{\bar{U} : U \in E\}$$

est non vide par compacité donc $\bigcap E$ aussi. Pour tout $x \in \bigcap E$, on a $E \subset \nu(x)$. Ainsi $E = \nu(x)$ donc ν est surjectif. L'application ν est injective car X est séparé et régulier.

2. Le frond $\nu(x)$ est maximal car si $\bar{U} \subset V$, on a $x \in V$ ou $x \in \neg U = U^{-c}$ donc $V \in \nu(x)$ ou $\neg U \in \nu(x)$.

Il est continu car

$$\nu^{-1}(\omega(U)) = \{x \in X : \nu(x) \in \omega(U)\} = \{x \in X : U \in \nu(x)\} = \{x \in X : x \in U\} = U.$$

Ainsi ν est un homéomorphisme entre X et $\mathfrak{end}(\mathfrak{RO}(X))$.

Si $f\colon X \to Y$ est une application continue, on a

$$\mathfrak{end}(\mathfrak{RO}(f))(\nu(x)) = \{U \in \mathfrak{RO}(Y) : \mathfrak{RO}(f)(V) \in \nu(x) \text{ pour un } V \prec U\}.$$

Or,

$$\mathfrak{RO}(f)(V) \in \nu(x) \iff x \in \mathfrak{RO}(f)(V) \iff x \in f^{-1}(V)^{-\circ}.$$

De plus,

$$x \in f^{-1}(V)^{-\circ} \text{ pour un } V \prec U \iff {}^{3} f(x) \in V \text{ pour un } V \prec U \iff f(x) \in U$$

par régularité. Ainsi

$$\mathfrak{end}(\mathfrak{RO}(f))(\nu(x)) = \{U \in \mathfrak{RO}(Y) : f(x) \in U\} = \nu(f(x))$$

donc le diagramme 2.1b commute. ■

Dans sa thèse, de Vries utilise ce résultat pour résoudre des problèmes de compactification. Il appelle une sous-algèbre B de $\mathfrak{RO}(X)$ *basique* si les ouverts de B forment une base. Il montre ensuite, entre autre, que l'espace X est complètement régulier si et seulement si l'algèbre $\mathfrak{RO}(X)$ admet une sous-algèbre basique. Il montre également que si X est complètement régulier, il existe une correspondance entre les compactifications de X et les sous-algèbres basiques de $\mathfrak{RO}(X)$.

Par après, les algèbres de de Vries ont été généralisées par les algèbres de subordination. Les algèbres de subordination sont également une généralisation des algèbres modales, qui permettent une approche algébrique de la logique modale.

2.3 Dualité de Stone

La catégorie des algèbres de Boole complètes peut se plonger dans la catégorie des algèbres de de Vries. Dans cette section, nous commençons par caractériser la sous-catégorie de **DeV** correspondant à l'image de ce plongement. Nous montrons ensuite que pour la dualité de de Vries, cette sous-catégorie correspond à la sous-catégorie des espaces de Stone extrêmement discontinus (tels que définis en B.19). En particulier, nous obtenons une preuve de la dualité entre les algèbres de Boole complètes et les espaces de Stone extrêmement discontinus, ce qui sera utile pour la suite.

2.3.1 Algèbres de de Vries et algèbres de Boole

Dans cette section, nous décrivons une construction permettant d'associer une algèbre de de Vries à tout algèbre de Boole complète. Ensuite, nous caractérisons les algèbres de de Vries s'obtenant de cette manière.

Définition 2.32. Étant donné une algèbre de Boole complète B, $\leq$ est une relation de compingence sur B. C'est la relation de compingence *discrète*.

Si $f\colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres de Boole, c'est également un morphisme d'algèbres de de Vries entre A et B munis de la relation de compingence discrète.

Définition 2.33. On note **cBA** la sous-catégorie de **BA** dont les objets sont les algèbres de Boole complètes et dont les morphismes sont les morphismes d'algèbres de Boole.

La construction décrite est un plongement de **cBA** dans **DeV**. C'est même un foncteur plein et fidèle, comme nous le verrons par la suite. Évidemment, les algèbres de de Vries appartenant à l'image de ce plongement sont les algèbres de de Vries munies de la relation de compingence discrète. Nous donnons donc une condition nécessaire et suffisante pour que la relation d'une algèbre de de Vries soit discrète.

3. En effet, si $f(x) \in V$ alors $x \in f^{-1}(V) \subset f^{-1}(V)^{-\circ}$. Réciproquement, si $x \in f^{-1}(V)^{-\circ}$, prenons W un ouvert régulier tel que $V \prec W \prec U$. Alors $x \in f^{-1}(V)^{-\circ} \subset f^{-1}(\bar{V})^{\circ} \subset f^{-1}(W)$.

Proposition 2.34. *Soit B une algèbre de de Vries. La relation de compingence est la relation discrète si et seulement si $a \prec a$ pour tout $a \in B$.*

Démonstration. Si la relation est la relation discrète, alors $a \prec a$ pour tout $a \in B$ puisque $a \leq a$ pour tout $a \in B$.

Si $a \prec a$ pour tout $a \in B$, il faut montrer que $a \prec b \iff a \leq b$ pour tous $a, b \in B$. Par définition d'une relation de compingence, il est évident que $a \prec b$ implique $a \leq b$. Réciproquement, si $a \leq b$, comme $a \prec a$, on a également $a \prec b$. ■

Définition 2.35. Une algèbre de de Vries est *discrète* si sa relation de compingence est la relation discrète, i.e. si $a \prec a$ pour tout a.

Nous avons savons qu'un morphisme d'algèbres de Boole est également un morphisme d'algèbres de de Vries discrète. Montrons la réciproque.

Proposition 2.36. *Soient A, B des algèbres de de Vries discrètes. Tout morphisme d'algèbres de de Vries $f \colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres de Boole.*

Démonstration. Il suffit de prouver que pour tout $a \in A$, on a $f(\neg a) = \neg f(a)$. D'une part, on a

$$f(a) \wedge f(\neg a) = f(a \wedge \neg a) = f(0) = 0$$

donc $f(\neg a) \leq \neg f(a)$. D'autre part, $a \prec a$ donc $\neg f(\neg a) \prec f(a)$, ce qui implique $\neg f(a) \leq f(\neg a)$. ■

Ainsi une application $f \colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres de Boole complète si et seulement si l'application $f \colon A \to B$ est un morphisme d'algèbres de de Vries discrète. Ainsi le plongement est égal à l'identité sur les morphismes, il est donc plein et fidèle.

Définition 2.37. On note **dDev** la sous-catégorie de **DeV** dont les objets sont les algèbres de de Vries discrètes et dont les morphismes sont les morphismes d'algèbres de de Vries.

Nous avons donc montré que les catégories **cBA** et **dDeV** sont isomorphes. À une algèbre de Boole B est associée l'algèbre de de Vries discrète B munie de la compingence $\leq$ et à une algèbre de de Vries B est associée l'algèbre de Boole B obtenue en oubliant la compingence. Ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. Comme les morphismes sont les même dans ces deux catégories, elles sont isomorphes.

2.3.2 Dualité pour les algèbres discrètes

Dans cette section, nous allons montrer que la dualité de de Vries fournit une correspondance entre les algèbres de de Vries discrètes et les espaces compacts, séparés et extrêmement discontinus. Ainsi, si **eKHaus** désigne la sous-catégorie de **KHaus** dont les objets sont les espaces compacts, séparés et extrêmement discontinus et dont les morphismes sont les fonctions continues, les catégories **dDeV** et **eKHaus** sont duales.

En se rappelant que les algèbres de de Vries discrètes sont en correspondance avec les algèbres de Boole complètes, nous en déduisons une dualité entre **cBA** et **eKHaus**. Nous montrerons que cette dualité est un cas particulier de la dualité de Stone. Nous commençons par montrer la correspondance entre **eKHaus** et **dDeV**.

Proposition 2.38. *Un espace topologique compact et séparé X est extrêmement discontinu si et seulement si l'algèbre de de Vries $\mathfrak{RO}(X)$ est discrète.*

Démonstration. Si X est extrêmement discontinu, alors pour tout ouvert U, on a $U^{-\circ} = \bar{U}$. Or, pour tout ouvert régulier, $U^{-\circ} = U$ donc $\bar{U} = U$, ce qui implique $U \prec U$.

Réciproquement, si $\bar{U} = U$ pour tout ouvert régulier, alors $F^{\circ -} = F^{\circ}$ pour tout fermé puisque F° est un ouvert régulier. En passant au complémentaire, on a $U^{-\circ} = \bar{U}$ pour tout ouvert U. Autrement dit, pour tout ouvert U, le fermé $\bar{U}$ est ouvert. ■

Dans une algèbre de de Vries discrète, tous les filtres sont ronds. Ainsi, les fronds maximaux sont exactement les ultrafiltres de l'algèbre de Boole associée. Ainsi, la restriction à **cDeV** du foncteur $\mathfrak{end}$ n'est rien d'autre que la restriction à **cBA** du foncteur $\mathfrak{U}$.

Dans un espace compact, séparé et extrêmement discontinu, un ouvert est régulier si et seulement si il est fermé. Ainsi, à nouveau, les restrictions à **eKHaus** des foncteurs $\mathfrak{RO}$ et $\mathfrak{OF}$ coïncident.

Chapitre 3

Espaces de Gleason

Nous allons maintenant montrer une équivalence entre deux catégories d'espaces topologiques. Dans la première section, nous nous intéressons à un problème universel et montrons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace soit solution de ce problème. Ces considérations mènent à la définition de couverture de Gleason, qui sera présentée par la suite. Dans la deuxième section, nous verrons un début d'équivalence entre les espaces de Gleason et les espaces compacts et séparés. Cette équivalence est complétée en une équivalence de catégorie dans la troisième section.

3.1 Espaces projectifs

Nous commençons par considérer un problème universel dans une catégorie quelconque. Ensuite, nous considérerons ce problème dans la catégorie des espaces séparés et dans la catégorie des espaces compacts et séparés. Nous démontrerons ensuite un théorème de Gleason, qui caractérise les solutions du problème dans **KHaus**. Les résultats de cette section proviennent de [11].

Pour énoncer le problème universel, nous devons d'abord généraliser la notion de surjection à une catégorie quelconque.

Définition 3.1. Un morphisme $f\colon X \to Y$ d'une catégorie est un *épimorphisme* si pour tous morphismes $g, h\colon Y \to Z$, l'égalité $g \circ f = h \circ f$ implique $g = h$.

Exemple. Dans **Top**, les épimorphismes sont les fonctions surjectives. En effet, si $f\colon X \to Y$ est une fonction surjective, on a bien $g \circ f = h \circ f$ qui implique $g = h$ pour tous $g, h\colon Y \to Z$. De plus, si $f\colon X \to Y$ est un épimorphisme, considérons $g\colon Y \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de $f(x)$ et $h\colon Y \to \{0, 1\}$ la fonction constante 1. Si $\{0, 1\}$ est muni de la topologie triviale, les fonctions g et h sont continues donc l'égalité $g \circ f = h \circ f$ implique $g = h$. Comme g est la fonction caractéristique de $f(X)$, ça implique $f(X) = Y$.

Nous pouvons maintenant formuler la définition d'objet projectif.

Définition 3.2. Un objet X d'une catégorie **K** est *projectif* si pour tout épimorphisme $f\colon Y \to Z$ et tout morphisme $g\colon X \to Z$, il existe un morphisme $h\colon X \to Y$ tel que $g = f \circ h$, i.e. tel que le diagramme 3.1 commute.

Nous allons étudier ce problème dans le cas où la catégorie **K** considérée est une sous-catégorie de **Haus**, la catégorie des espaces séparés. Si la catégorie **K** possède certaines propriétés, nous pouvons donner une condition nécessaire pour qu'un espace soit projectif.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[r, two heads, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Figure 3.1 – Objet projectif

Théorème 3.3 (Gleason)**.** *Si* **K** *est une sous-catégorie de* **Haus** *telle que*

(i) l'espace discret $\{p, q\}$ est un objet de **K***,*

(ii) si X est un objet de **K***, alors l'espace produit $X \times \{p, q\}$ est un objet de* **K** *et la projection sur X est un morphisme de* **K***,*

(iii) si X est un objet de **K** *et Y un fermé de X, alors l'espace Y est un objet de* **K** *et l'inclusion est un morphisme de* **K***,*

alors tout espace projectif est extrêmement discontinu.

Démonstration. Soient X un espace projectif et U un ouvert de X. Nous devons prouver que $\bar{U}$ est ouvert.

Nous travaillons dans l'espace $X \times \{p, q\}$, la projection est $\tau \colon X \times \{p, q\} \to X$. Considérons le fermé

$$Y = U^c \times \{p\} \cup \bar{U} \times \{q\}$$

et l'inclusion $\iota \colon Y \to X \times \{p, q\}$. L'application $\tau \circ \iota \colon Y \to X$ est continue et surjective donc il existe $h \colon X \to Y$ tel que $\mathrm{id} = \tau \circ \iota \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
Y \arrow[r, two heads, "\tau \circ \iota"] & X
\end{tikzcd}$$

L'application $\tau \circ \iota$ restreinte à $U \times \{q\}$ est injective donc $h(x) = (x, q)$ si $x \in U$. Ainsi

$$U \subset h^{-1}(\bar{U} \times \{q\}).$$

Comme $\bar{U} \times \{q\}$ est fermé, on a même

$$\bar{U} \subset h^{-1}(\bar{U} \times \{q\}).$$

Pareillement, l'application $\tau \circ \iota$ restreinte à $\bar{U}^c \times \{p\}$ est injective donc $h(x) = (x, p)$ si $x \notin \bar{U}$. Ainsi

$$\bar{U} = h^{-1}(\bar{U} \times \{q\}).$$

Or $\bar{U} \times \{q\}$ est ouvert dans Y donc $\bar{U}$ est ouvert. ■

Ce résultat reste valide si on considère le problème universel dans la catégorie des espaces compacts et séparés.

Corollaire 3.4. *Dans la catégorie* **KHaus***, un espace projectif est extrêmement discontinu.*

Démonstration. Il suffit de vérifier les conditions du théorème précédent. L'espace $\{p, q\}$ est compact et séparé, le produit de deux compacts séparés est compact et séparé et tout sous-espace fermé d'un espace compact et séparé est compact et séparé. ■

3.1.1 Une condition suffisante

Notre but ici est de démontrer la réciproque du résultat précédent. Nous commençons par trois résultats préliminaires.

Définition 3.5. Une application $\tau \colon T \to X$ est *irréductible* si elle est surjective et si $\tau(E) \subsetneq X$ pour tout fermé $E \subsetneq T$.

Lemme 3.6. *Soient X et S des espaces compacts et séparés et $\tau \colon S \to X$ une surjection continue. Il existe un fermé T de S tel que $\tau \colon T \to X$ est irréductible.*

Démonstration. Appliquons le lemme de Zorn pour trouver un élément T minimal pour la propriété $\tau(T) = X$ parmi les fermés de S. Il suffit de montrer que l'ensemble des fermés ayant cette propriété est inductif. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une chaîne. Alors d'une part $\bigcap_{i\in I} T_i$ est fermé et minore les T_i. D'autre part, pour tout $x \in X$, la famille de fermés

$$(T_i \cap \tau^{-1}(x))_{i\in I}$$

est une suite décroissante de fermés non vides donc

$$\bigcap_{i\in I}(T_i \cap \tau^{-1}(x)) = \left(\bigcap_{i\in I} T_i\right) \cap \tau^{-1}(x)$$

est non vide. Cela montre que

$$\tau\left(\bigcap_{i\in I} T_i\right) = X.$$

■

Lemme 3.7. *Soient X et T des espaces compacts et séparés et $\rho\colon T \to X$ une application continue irréductible. Si U est un ouvert de T, on a*

$$\rho(U) \subset (X \setminus \rho(U^c))^-. \tag{3.1}$$

Démonstration. C'est trivial si U est vide. Sinon, soient $x \in \rho(U)$ et V un voisinage ouvert de x. Il suffit de montrer que $V \cap (X \setminus \rho(U^c))$ est non vide.

Comme $U \cap \rho^{-1}(V)$ est un ouvert non vide,

$$\rho(T \setminus (U \cap \rho^{-1}(V))) \subsetneq X.$$

Prenons

$$y \notin \rho(T \setminus (U \cap \rho^{-1}(V))).$$

Alors d'une part $y \notin \rho(U^c)$. D'autre part, comme ρ est surjectif, il existe z tel que $\rho(z) = y$ avec $z \in \rho^{-1}(V)$. Ainsi $y \in \rho(\rho^{-1}(V)) \subset V$ donc

$$y \in V \cap (X \setminus \rho(U^c)).$$

■

Lemme 3.8. *Soient X un espace compact extrêmement discontinu et T un espace compact et séparé. Si $\rho\colon T \to X$ est une application continue irréductible, alors ρ est un homéomorphisme.*

Démonstration. Il suffit de montrer que ρ est injectif. Supposons que $x, y \in T$ sont deux points distincts tels que $\rho(x) = \rho(y)$. Soient U, V des ouverts disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$. Les ensembles

$$X \setminus \rho(U^c) \quad \text{et} \quad X \setminus \rho(V^c)$$

sont ouverts et disjoints car $T = U^c \cup V^c$.

$$(X \setminus \rho(U^c))^- \quad \text{et} \quad X \setminus \rho(V^c)$$

sont disjoints car $X \setminus \rho(V^c)$ est ouvert et

$$(X \setminus \rho(U^c))^- \quad \text{et} \quad (X \setminus \rho(V^c))^-$$

sont disjoints car $(X \setminus \rho(U^c))^-$ est ouvert. Or, par le lemme précédent, $\rho(x) = \rho(y)$ est un point commun à ces deux ensembles. ■

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat principal.

Théorème 3.9 (Gleason)**.** *Dans la catégorie* **KHaus***, un espace extrêmement discontinu est projectif.*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, two heads, "\rho"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & X \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
& Y \arrow[r, two heads, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Soient X un espace compact, séparé et extrêmement discontinu, Y et Z des espaces compacts et séparés, $f\colon Y \to Z$ une surjection continue et $g\colon X \to Z$ une application continue.

Dans $X \times Y$, considérons le sous-espace

$$S = \{(x, y) : g(x) = f(y)\}.$$

Cet ensemble est fermé donc compact. Comme f est surjectif, la projection $\tau_1\colon S \to X$ est surjective. Par le Lemme 3.6, il existe $T \subset S$ tel que $\tau_1\colon T \to X$ est irréductible.

Soit ρ la restriction de τ_1 à T. Par le Lemme 3.8, ρ est un homéomorphisme. Posons $h = \tau_2 \circ \rho^{-1}$, où $\tau_2\colon X \times Y \to Y$ est une projection. Alors h convient. En effet, si $x \in X$, alors

$$f \circ h(x) = f(\tau_2(\rho^{-1}(x))) = g(\tau_1(\rho^{-1}(x))) = g(x),$$

par définition de S. ∎

3.1.2 Couvertures de Gleason

Maintenant, nous allons montrer que tout espace compact et séparé est l'image continue d'un espace projectif compact. Plus précisément, nous allons démontrer le résultat suivant.

Théorème 3.10 (Gleason)**.** *Étant donné un espace compact et séparé X, il existe un espace compact, séparé et projectif $\widehat{X}$ et une application continue irréductible $\pi\colon \widehat{X} \to X$. La paire $(\widehat{X}, \pi)$ est unique à isomorphisme près, dans le sens où si $(\widehat{X}', \pi')$ est une autre paire, alors il existe un homéomorphisme $\rho\colon \widehat{X}' \to \widehat{X}$ tel que $\pi' = \pi \circ \rho$.*

Nous verrons à la section suivante que ce résultat induit une équivalence entre les objets de **KHaus** et les espaces de Stone extrêmement séparés.

Pour construire l'espace de $\widehat{X}$, on considère l'espace de Stone de $\mathfrak{RO}(X)$, i.e. l'ensemble des ultrafiltres d'ouverts réguliers.

Définition 3.11. Étant donné un espace régulier X, nous savons que $\mathfrak{RO}(X)$ est une algèbre de Boole complète. Nous appelons *filtre sur X* un filtre de $\mathfrak{RO}(X)$. Nous parlerons également d'*ultrafiltre* sur X si le filtre est maximal.

Pour définir la fonction π, nous définissons une notion de convergence pour un ultrafiltre.

Définition 3.12. Étant donné un point x d'un espace régulier, $\nu(x)$ désigne le filtre de ses voisinages ouverts réguliers. Il s'agit d'une base de voisinages.

Un filtre F sur un espace régulier X converge vers $x \in X$, noté $F \to x$, si $\nu(x) \subset F$. Nous dirons également que x est une limite de F.

Bien que nous ne rentrons pas dans les détails ici, nous mentionnons tout de même que la notion de convergence pour les filtres est une généralisation de la convergence de suite. En fait, les filtres sont des objets étudiés en topologie classique et leur utilisation permet de démontrer des résultats forts, tel que le théorème de Tychonoff (voir par exemple [5]).

Proposition 3.13. *Un filtre propre sur un espace séparé et régulier admet au plus une limite.*

Démonstration. Supposons que $F \to x$ et $F \to y$ avec $x \neq y$. Alors, il existe $U \in \nu(x)$ et $V \in \nu(y)$ disjoints. On a $U, V \in F$ donc $U \cap V = \emptyset \in F$, or F est propre. ∎

Proposition 3.14. *Un ultrafiltre sur un espace compact et régulier admet au moins une limite.*

Démonstration. Soit F un ultrafiltre sur un espace compact X et supposons qu'il n'admet aucune limite. Alors pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U_x \in \nu(x)$ tel que $U_x \notin F$. Ainsi

$$X = \bigcup_{x \in X} U_x$$

et par la compacité, il existe $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que

$$X = U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n}.$$

Or le filtre F est un ultrafiltre et $U_{x_1}, \ldots, U_{x_n} \notin F$ donc $X \notin F$, ce qui est absurde. ■

Corollaire 3.15. *Un ultrafiltre sur un espace compact et séparé admet une unique limite.*

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le Théorème 3.10.

Existence. Soit $\widehat{X}$ l'espace de Stone de l'algèbre de Boole complète $\mathfrak{RO}(X)$. L'espace $\widehat{X}$ est compact, séparé et extrêmement discontinu donc c'est un espace projectif. Un élément de $\widehat{X}$ est un ultrafiltre sur $\mathfrak{RO}(X)$. Si $F \in \widehat{X}$, on définit $\pi(F) \in X$ comme étant l'unique limite de F. L'application π est une surjection car pour tout $x \in X$, $\nu(x)$ est un filtre propre donc est contenu dans un ultrafiltre $F \in \widehat{X}$. On a alors $\pi(F) = x$.

Montrons que π est continu. Soient U un ouvert de X et $F \in \pi^{-1}(U)$. Prenons V un ouvert régulier tel que $\pi(F) \in V$ et $\bar{V} \subset U$. Posons

$$W = \upsilon(V) = \{G \in \widehat{X} : V \in G\}.$$

C'est un ouvert. De plus, $G \in W$ implique $\pi(G) \in \bar{V} \subset U$[1]. Ainsi, $F \in W \subset \pi^{-1}(U)$ donc ϕ est continu.

Montrons maintenant que π est irréductible. Soit E un fermé propre de $\widehat{X}$. L'espace $\widehat{X}$ possède une base d'ouverts-fermés donc il existe un ouvert-fermé U disjoint de E. Par le théorème de dualité de Stone, il existe $V \in \mathfrak{RO}(X)$ non vide tel que

$$U = \upsilon(V) = \{G \in \widehat{X} : V \in G\}.$$

De plus, $\pi(G) \in V$ implique $V \in G$ donc $G \in U$. Ainsi,

$$\pi(E) \subset \pi(U^c) \subset V^c \subsetneq X.$$

■

Nous pouvons maintenant démontrer l'unicité.

Unicité. Supposons avoir une paire $(\widehat{X}', \pi')$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Comme $\widehat{X}'$ est projectif et π est surjectif, il existe une application

$$\rho \colon \widehat{X}' \to \widehat{X}$$

telle que $\pi' = \pi \circ \rho$. L'ensemble $\rho(\widehat{X}')$ est compact donc fermé. Comme

$$\pi(\rho(\widehat{X}')) = \pi'(\widehat{X}') = X,$$

on a $\rho(\widehat{X}') = \widehat{X}$ vu l'irréductibilité de π, donc ρ est surjectif. Pour tout fermé propre E de $\widehat{X}'$, on a

$$\pi(\rho(E)) = \pi'(E) \subsetneq X$$

vu l'irréductibilité de π'. Ainsi $\rho(E) \subsetneq \widehat{X}$. Par le Lemme 3.8, ρ est un homéomorphisme. ■

1. Si $\pi(G) = x$, alors $\nu(x) \subset G$ donc tout éléments de $\nu(x)$ a une intersection non vide avec $V \in G$.

3.2 Équivalence de Gleason

Les résultats de la section précédente nous incite à définir une catégorie d'espaces de Gleason. Nous définissons ici les objets. Nous montrer ensuite un équivalence entre les espaces de Gleason et les objets de **KHaus**.

Définition 3.16. Une relation $R \subset X \times Y$ entre deux espaces topologiques est *fermée* si l'ensemble R est un fermé de $X \times Y$ pour la topologie produit.

Définition 3.17. Une relation d'équivalence $\equiv$ sur un espace topologique X est *irréductible* si l'application quotient $\kappa \colon X \to X/\equiv$ est irréductible, i.e. si pour tout fermé propre E de X, l'ensemble

$$\equiv[E] = \{x \in X : x \equiv y \text{ pour un } y \in E\} \tag{3.2}$$

est un fermé propre de X.

Définition 3.18. Un *espace de Gleason* est un espace compact, séparé et extrêmement discontinu $\mathbb{X}$ muni d'une relation d'équivalence $\equiv$ fermée et irréductible.

3.2.1 Le foncteur $\mathfrak{Q}$

Nous allons montrer qu'à tout espace de Gleason correspond un espace compact et séparé, obtenu en passant au quotient.

Proposition 3.19. *Si $\mathbb{X}$ est un espace de Gleason, alors $\mathbb{X}/\equiv$ est un espace compact et séparé. De plus, si κ désigne l'application quotient, alors $(\mathbb{X}, \kappa)$ est la couverture de Gleason de $\mathbb{X}/\equiv$.*

Démonstration. L'espace $\mathbb{X}/\equiv$ est compact car image continue d'un compact. Montrons qu'il est séparé.

Remarquons d'abord que l'application κ est fermée. En effet, si E est un fermé, il est compact. Alors $\kappa^{-1}(\kappa(E))$ est la projection sur la deuxième composante de $(E \times \mathbb{X}) \cap \equiv$, qui est compact. Ainsi la projection est compacte donc fermée.

Soient $[x]$ et $[y]$ des points distincts de $\mathbb{X}/\equiv$. Alors $[x]$ et $[y]$ sont des fermés disjoints de $\mathbb{X}$, car $[x] = \kappa^{-1}(\kappa(x))$ et $[y] = \kappa^{-1}(\kappa(y))$. Ainsi, il existe des ouverts disjoints U et U' contenant respectivement $[x]$ et $[y]$. Les ouverts

$$V = \kappa^{-1}(\kappa(U^c))^c \quad \text{et} \quad V' = \kappa^{-1}(\kappa(U'^c))^c$$

sont disjoints et contiennent respectivement $[x]$ et $[y]$. Comme V et V' sont des unions de classes d'équivalence, on a

$$\kappa^{-1}(\kappa(V)) = V \quad \text{et} \quad \kappa^{-1}(\kappa(V')) = V'.$$

Ainsi, $\kappa(V)$ et $\kappa(V')$ sont des ouverts disjoints contenant respectivement $[x]$ et $[y]$, ce qui montre que $\mathbb{X}/\equiv$ est séparé.

Il est évident que $(\mathbb{X}, \kappa)$ est la couverture de Gleason de $\mathbb{X}/\equiv$ puisque $\kappa \colon \mathbb{X} \to \mathbb{X}/\equiv$ est irréductible. ■

Nous avons donc une des deux directions de l'équivalence.

Définition 3.20. Étant donné un espace de Gleason $\mathbb{X}$, on note $\mathfrak{Q}(\mathbb{X})$ l'espace compact et séparé $\mathbb{X}/\equiv$.

3.2.2 Le foncteur $\mathfrak{G}$

Nous allons maintenant montrer qu'à tout espace compact et séparé correspond un espace de Gleason, obtenu en considérant la couverture de Gleason. Nous aurons pour cela besoin du théorème d'isomorphie pour les espaces compacts et séparés.

Définition 3.21. Étant donné une application $f \colon X \to Y$, on définit une relation d'équivalence $\ker f$ sur X par

$$\ker f = \{(x, y) \in X^2 : f(x) = f(y)\}. \tag{3.3}$$

Théorème 3.22 (Isomorphie)**.** *Si $f \colon X \to Y$ une application continue entre deux espaces compacts et séparés, alors $X/\ker f$ et $f(X)$ sont des espaces topologiques compacts et séparés homéomorphes.*

Démonstration. Soit $\kappa\colon X \to X/\ker f$ l'application quotient. L'espace $X/\ker f = \kappa(X)$ est compact car image continue d'un compact. L'espace $f(X)$ est séparé car sous-espace d'un espace séparé.

L'application f se factorise en $\tilde{f} \circ \kappa$ où $\tilde{f}$ est une bijection définie par

$$\tilde{f}\colon X/\ker f \to f(X) \quad [x] \mapsto f(x).$$

Si U est ouvert, alors

$$\kappa^{-1}\left(\tilde{f}^{-1}(U)\right) = f^{-1}(U)$$

est ouvert par continuité de f donc $\tilde{f}^{-1}(U)$ est ouvert par définition de la topologie quotient. Ainsi $\tilde{f}$ est une bijection continue d'un espace compact dans un espace séparé donc est un homéomorphisme. ■

Ce théorème permet de compléter l'équivalence.

Proposition 3.23. *Si X est un espace compact et séparé dont $(\widehat{X}, \pi)$ est la couverture de Gleason, alors $\widehat{X}$ muni de la relation d'équivalence $\ker \pi$ est un espace de Gleason. De plus, $\widehat{X}/\ker \pi$ est homéomorphe à X.*

Démonstration. La relation $\ker \pi$ est fermée [2]. Ainsi $(\widehat{X}, \ker \pi)$ est un espace de Gleason. Par le théorème d'isomorphie, X est homéomorphe au quotient $X/\ker \pi$. Comme π est irréductible, l'application quotient $\kappa\colon \widehat{X} \to \widehat{X}/\ker \pi$ l'est également. ■

Nous avons maintenant la seconde direction de l'équivalence.

Définition 3.24. Étant donné un espace compact et séparé X, on note $\mathfrak{G}(X)$ l'espace de Gleason $\widehat{X}$ muni de la relation $\ker \pi$.

3.2.3 Équivalence

Nous montrons maintenant que les foncteurs $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{G}$ sont inverses l'un de l'autre.

Définition 3.25. Deux espaces de Gleason $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ sont *isomorphes* s'il existe un homéomorphisme $\rho\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{X}$ tel que pour tous $y, y' \in \mathbb{Y}$, on a $y \equiv y'$ si et seulement si $\rho(y) \equiv \rho(y')$.

Théorème 3.26. *Si $\mathbb{X}$ est un espace de Gleason, alors $\mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X}))$ est isomorphe à $\mathbb{X}$.*

Si X est un espace compact et séparé, alors $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(X))$ est homéomorphe à X.

Démonstration. Soient $\mathbb{X}$ un espace de Gleason,

$$\kappa\colon \mathbb{X} \to \mathfrak{Q}(\mathbb{X})$$

l'application quotient et

$$\pi\colon \mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X})) \to \mathfrak{Q}(\mathbb{X})$$

la couverture de Gleason. On sait que $(\mathbb{X}, \kappa)$ est la couverture de Gleason de $\mathfrak{Q}(\mathbb{X})$. Ainsi, il existe un homéomorphisme $\rho\colon \mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X})) \to \mathbb{X}$ tel que $\pi = \kappa \circ \rho$. Alors,

$$(x, y) \in \ker \pi \iff \pi(x) = \pi(y) \iff \kappa(\rho(x)) = \kappa(\rho(y)) \iff (\rho(x), \rho(y)) \in \ker \kappa.$$

On en déduit que $\mathbb{X}$ et $\mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X}))$ sont isomorphes.

Si X est un espace compact et régulier et $(\widehat{X}, \pi)$ sa couverture de Gleason, alors $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(X)) = \widehat{X}/\ker \pi$ est homéomorphe à X. L'homéomorphie est donné par

$$\eta\colon X \to \mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(X)) \quad x \mapsto \pi^{-1}(x) \quad \text{et} \quad \tilde{\pi}\colon \mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(X)) \to X \quad [x] \mapsto \pi(x).$$

■

2. Comme X est séparé et $\ker \pi = \{(x, y) \in X^2 : \pi(x) = \pi(y)\}$, si $(x, y) \notin \ker \pi$, il existe U et V disjoints tels que $\pi(x) \in U$ et $\pi(y) \in V$. Alors $\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(V)$ est un ouvert disjoint de $\ker \pi$ contenant (x, y).

3.3 Dualité avec les algèbres de de Vries

En combinant l'équivalence de la section précédente à la dualité du chapitre précédent, on sait que les espaces de Gleason sont en correspondance avec les algèbres de de Vries. Dans cette section, nous présentons une preuve directe de ce résultat. Les résultats présentés dans cette section proviennent de [4].

Nous avons vu, dans la dernière section du chapitre précédent, que les foncteurs $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{O}\mathfrak{F}$ donne une correspondance entre les algèbres de Boole complètes et les espaces compacts, séparés et extrêmement discontinus. Nous montrons maintenant que les relations de compingence sur une algèbre sont en correspondance avec les relations fermées irréductibles sur son espace dual.

La dualité peut en fait être démontrée dans un cadre plus général, que nous exposons ici. Pour cela, nous devons définir une propriété additionnelle des relation de compingence. Toute relation de compingence $\prec$ satisfait

(DV4') $a, b \prec c$ implique $a \vee b \prec c$.

Cependant, nous verrons que l'on peut montrer une dualité en utilisant uniquement (DV1), (DV2), (DV4) et (DV4').

3.3.1 Le foncteur $\mathfrak{U}$

Nous montrons ici que le foncteur $\mathfrak{U}$ peut être utilisé pour construire un espace de Gleason à partir d'une algèbre de de Vries. Nous commençons par introduire une notation.

Définition 3.27. Étant donné un élément $a \in B$ d'une algèbre de de Vries, on définit le filtre

$$\twoheaduparrow a = \{b \in B : a \prec b\}. \tag{3.4}$$

Définissons maitenant une relation d'équivalence sur $\mathfrak{U}(B)$.

Définition 3.28. Étant donné une algèbre de de Vries B, on définit une relation $\equiv$ sur $\mathfrak{U}(B)$ par $x \equiv y$ si pour tout $a \in x$, on a

$$\twoheaduparrow x \subset y, \tag{3.5}$$

où $\twoheaduparrow x$ désigne l'ensemble $\bigcup_{a\in x} \twoheaduparrow a$.

Il faut bien sûr montrer que cette relation est fermée, qu'il s'agit d'une relation d'équivalence et qu'elle est irréductible. Nous commençons par montrer qu'elle est fermée. Pour ce faire, la définition et le lemme qui suivent nous seront utiles.

Définition 3.29. Étant donné une relation $R \subset X \times Y$ entre deux ensembles,on définit l'*image* par R de $S \subset X$ comme étant

$$R[S] = \{y \in Y \mid \exists x \in S : x\ R\ y\}. \tag{3.6}$$

Pareillement, on définit la *préimage* par R d'un ensemble $S \subset Y$ par

$$R^{-1}[S] = \{x \in X \mid \exists y \in S : x\ R\ y\}. \tag{3.7}$$

Remarque 3.30. Si R est le graphe d'une application f, les images et préimages par R correspondent aux images et préimages par f.

Lemme 3.31. *Soit $R \subset X \times Y$ une relation entre deux espaces compacts et séparés. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) R est fermé,

(ii) pour tous fermés $F \subset X$ et $G \subset Y$, $R[F]$ et $R^{-1}[G]$ sont fermés,

(iii) pour tous $A \subset X$ et $B \subset Y$, $R[A]^- \subset R[A^-]$ et $R^{-1}[B]^- \subset R^{-1}[B^-]$,

(iv) si $(x, y) \notin R$, il existe des ouverts U de X et V de Y tels que $x \in U, y \in V$ et $R[U] \cap V = \emptyset$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Il suffit de remarquer que $R[F]$ est la projection [3] sur Y de $(F \times Y) \cap R$ (qui est fermé) et $R^{-1}[G]$ la projection sur X de $(X \times G) \cap R$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). C'est évident. Les ensembles $R[A^-]$ et $R^{-1}[B^-]$ sont fermés et contiennent respectivement $R[A]$ et $R^{-1}[B]$ donc contiennent également leurs adhérences respectives.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Supposons que ce n'est pas la cas. Alors, pour tout ouvert U voisinage de x, on a $R[U] \cap V \neq \emptyset$ pour tout voisinage V de y donc

$$y \in R[U]^- \subset R[U^-].$$

C'est équivalent à

$$\bar{U} \cap R^{-1}[y] \neq \emptyset.$$

Comme X est régulier, $\bar{U} \cap R^{-1}[y] \neq \emptyset$ pour tout voisinage U de x est équivalent à $U \cap R^{-1}[y]$ pour tout voisinage U de x. Ainsi

$$x \in R^{-1}[y]^- \subset R^{-1}[\{y\}^-] = R^{-1}[y],$$

donc $(x, y) \in R$.

(iv) $\Rightarrow$ (i). On a $R[U] \cap V = \emptyset$ si et seulement si $U \times V$ et R sont disjoints. Le point (iv) indique donc exactement que R^c est ouvert. ∎

Nous pouvons maintenant montrer que la relation $\equiv$ définie par l'équation (3.5) est fermée.

Proposition 3.32. *Si B est une algèbre de Boole munie d'une relation $\prec$, alors la relation $\equiv$ sur $\mathfrak{U}(B)$ définie par* (3.5) *est fermée.*

Démonstration. Si $(x, y) \notin \equiv$, alors $\Uparrow x \not\subset y$ donc il existe $a, b \in B$ tels que $a \prec b$, $a \in x$ et $b \notin y$. Posons

$$U = \upsilon(a) = \{z \in \mathfrak{U}(B) : a \in z\}$$

et

$$V = \upsilon(b)^c = \{z \in \mathfrak{U}(B) : b \notin z\} = \upsilon(\neg b).$$

On a $x \in U$, $y \in V$ et $\equiv[U] \subset \upsilon(b)$, qui est disjoint de V. Nous pouvons conclure en utilisant le lemme précédent. ∎

Remarque 3.33. Remarquons que dans la démonstration précédente, nous n'utilisons aucune des propriétés de la relation $\prec$. Nous devrons cependant utiliser ces propriétés pour montrer la dualité.

Attelons-nous maintenant à démontrer que la relation $\equiv$ est une équivalence.

Proposition 3.34. *Soit B est une algèbre de Boole munie d'une relation $\prec$. On considère la relation $\equiv$ sur $\mathfrak{U}(B)$ définie par* (3.5)*.*

(i) Si la relation $\prec$ satisfait (DV2), alors la relation $\equiv$ est réflexive.

(ii) Si la relation $\prec$ satisfait (DV5), alors la relation $\equiv$ est symétrique.

(iii) Si la relation $\prec$ satisfait (DV6), alors la relation $\equiv$ est transitive.

Démonstration. (i) C'est évident, (DV2) implique que $\Uparrow x \subset x$ pour tout filtre x.

(ii) Si $x \equiv y$, on a $\Uparrow x \subset y$. Soit $b \in \Uparrow y$, il existe $a \in y$ tel que $a \prec b$. Supposons que $b \notin x$. Alors $\neg b \in x$ donc $\neg a \in \Uparrow x$ puisque $\neg b \prec \neg a$. Mais alors $\neg a \in y$, ce qui est absurde puisque $a \in y$.

(iii) Si $x \equiv y$ et $y \equiv z$, alors $\Uparrow x \subset y$ et $\Uparrow y \subset z$ donc $\Uparrow\Uparrow x \subset z$. Or

$$\Uparrow\Uparrow x = \{c \in B : a \prec b \prec c \text{ pour un } b\} = \{c \in B : a \prec c\} = \Uparrow x.$$

Ainsi $\Uparrow x \subset z$ donc $x \equiv z$.

∎

Finalement, montrons que $\equiv$ est irréductible si $\prec$ est une relation de compingence.

3. Comme nous travaillons dans des espaces compacts et séparés, les projections sont fermées car l'image d'un compact est compact.

Proposition 3.35. *Si B est une algèbre de de Vries, la relation d'équivalence fermée $\equiv$ sur $\mathfrak{U}(B)$ est irréductible.*

Démonstration. Il reste à montrer que si $\prec$ satisfait (DV7) en plus de toutes les autres conditions, alors la relation d'équivalence $\equiv$ est irréductible.

Soit E un fermé propre de $\mathfrak{U}(B)$. L'ouvert E^c est non vide donc il existe $a \in B$ tel que $a \neq 0$ et $\upsilon(a) \subset E^c$. Soit $b \in B$ tel que $b \neq 0$ et $b \prec a$. Comme $\upsilon(b) \neq \emptyset$, il suffit de montrer que $\equiv[E] \cap \upsilon(b) = \emptyset$.

Supposons avoir $x \in E$ et $y \in \upsilon(b)$ tel que $x \equiv y$. Alors $x \notin \upsilon(a)$ donc $a \notin x$, ce qui implique $\neg a \in x$. Ainsi, $\neg b \in \Uparrow x \subset y$ donc $\neg b \in y$. Cela contredit le fait que $y \in \upsilon(b)$. ∎

Ainsi, à tout algèbre de de Vries B, on associe un espace de Gleason $\mathfrak{U}(B)$.

3.3.2 Le foncteur $\mathfrak{OF}$

Nous montrons maintenant que le foncteur $\mathfrak{OF}$ peut être utilisé pour construire une algèbre de de Vries à partir d'un espace de Gleason.

Définition 3.36. Étant donné un espace de Gleason $\mathbb{X}$, on définit une relation $\prec$ sur $\mathfrak{OF}(\mathbb{X})$ par

$$U \prec V \quad \text{si} \quad \equiv[U] \subset V. \tag{3.8}$$

Il est clair que la relation $\prec$ ainsi définie vérifie (DV1), (DV3), (DV4) et (DV4'). Montrons qu'il s'agit d'une relation de compingence.

Proposition 3.37. *Soit $\mathbb{X}$ un espace de Stone muni d'une relation $\equiv$. On considère la relation $\prec$ sur $\mathfrak{OF}(\mathbb{X})$ définie par (3.8).*

(i) Si la relation $\equiv$ est réflexive, alors $\prec$ satisfait (DV2).

(ii) Si la relation $\equiv$ est symétrique, alors $\prec$ satisfait (DV5).

(iii) Si la relation $\equiv$ est transitive, alors $\prec$ satisfait (DV6).

Démonstration. (i) C'est évident car $U \subset \equiv[U]$.

(ii) Si $\equiv[U] \subset V$, alors
$$\equiv^{-1}[V^c] \subset U^c.$$
Comme $\equiv$ est symétrique,
$$\equiv^{-1}[V^c] = \equiv[V^c]$$
donc $V^c \prec U^c$.

(iii) Si $U \prec V$, alors $\equiv[U] \subset V$. L'ensemble $\equiv[U]$ est fermé et V est ouvert donc il existe un ouvert-fermé W tel que
$$\equiv[U] \subset W \subset V.$$
Les ensembles $\equiv[U]$ et $\equiv^{-1}[W^c]$ sont disjoints. En effet, supposons qu'il existe
$$y \in \equiv[U] \cap \equiv^{-1}[W^c].$$
Alors il existe $x \in U$ et $z \in W^c$ tels que $x \equiv y$ et $y \equiv z$, mais alors $x \equiv z$, ce qui est impossible puisque $\equiv[U]$ et W^c sont disjoints.
Ainsi, on a
$$\equiv[U] \subset \equiv^{-1}[W^c]^c = W'.$$
De plus, part définition de W', on a
$$\equiv[W'] \subset W \subset V.$$
Soit W'' un ouvert-fermé tel que
$$\equiv[U] \subset W'' \subset W'.$$
Alors $U \prec W''$ et $\equiv[W''] \subset \equiv[W'] \subset V$ donc $W'' \prec V$.

∎

Finalement, montrons que $\prec$ satisfait (DV7) si $\equiv$ est une relation d'équivalence irréductible.

Proposition 3.38. *Si $\mathbb{X}$ est un espace de Gleason, la relation $\prec$ définie sur $\mathfrak{OF}(\mathbb{X})$ est une relation de compingence.*

Démonstration. Montrons que $\prec$ satisfait (DV7). Si $U \neq \emptyset$, l'irréductibilité de $\equiv$ implique que

$$\equiv[U^c] \subsetneq \mathbb{X}.$$

Comme c'est un fermé, il existe $V \in \mathfrak{OF}(\mathbb{X})$ tel que $V \neq \emptyset$ et $\equiv[U^c] \subset V^c$. Ça implique directement $\equiv^{-1}[V] \subset U$ donc $V \prec U$ puisque $\equiv$ est symétrique. ■

Ainsi, à tout espace de Gleason $\mathbb{X}$, on associe une algèbre de de Vries $\mathfrak{OF}(\mathbb{X})$.

3.3.3 Dualité

Nous devons maintenant montrer que pour tout algèbre de de Vries B, l'algèbre $\mathfrak{OF}(\mathfrak{U}(B))$ est isomorphe à B et que pour tout espace de Gleason $\mathbb{X}$, l'espace $\mathfrak{U}(\mathfrak{OF}(\mathbb{X}))$ est isomorphe à $\mathbb{X}$.

Par la dualité de Stone, nous savons déjà que les algèbres B et $\mathfrak{OF}(\mathfrak{U}(B))$ sont isomorphes en tant qu'algèbres de Boole. Il reste donc à démontrer la propriété suivante. Nous n'avons pas encore utilisé les propriétés (DV1), (DV3), (DV4) et (DV4'). Nous les utilisons ici.

Proposition 3.39. *Si B est une algèbre de de Vries et υ est l'isomorphisme canonique entre B et $\mathfrak{OF}(\mathfrak{U}(B))$, alors $a \prec b$ si et seulement si $\upsilon(a) \prec \upsilon(b)$.*

Démonstration. Si $a \prec b$, alors pour tout filtre $x \in \upsilon(a)$, on a $b \in \Uparrow x$ donc $\equiv[x] \subset \upsilon(b)$. Ainsi, on a bien $\upsilon(a) \prec \upsilon(b)$.

Si $a \not\prec b$, alors $b \notin \Uparrow a$. Comme $\prec$ satisfait (DV1), (DV3) et (DV4), l'ensemble $\Uparrow a$ est un filtre donc il existe un ultrafiltre x tel que $\Uparrow a \subset x$ et $b \notin x$. Montrons qu'il existe un ultrafiltre y tel que $a \in y$ et $\Uparrow y \subset x$. Si y est un tel ultrafiltre, on a $y \in \upsilon(a)$ donc $x \in \equiv[\upsilon(a)]$ et $x \notin \upsilon(b)$ donc $\upsilon(a) \not\prec \upsilon(b)$.

Soit

$$P = \{y : y \text{ est un filtre}, a \in y, \Uparrow y \subset x.$$

Le filtre $\{b \in B : a \leq b\}$ appartient à P donc P est non vide. Il est aisé de voir que P est inductif. Ainsi, par le lemme de Zorn, il existe un filtre y maximal dans Z. Montrons que y est un ultrafiltre.

Supposons qu'il existe $c \in B$ tel que $c, \neg c \notin y$. Soient F_1 et F_2 les filtres engendrés par $y \cup \{c\}$ et $y \cup \{\neg c\}$, respectivement. Ils sont strictement plus grands que y donc n'appartiennent pas à Z, i.e. $\Uparrow F_1, \Uparrow F_2 \not\subset x$. Ainsi il existe $d_1, d_2 \in y$ et $e_1, e_2 \notin x$ tels que $c \wedge d_1 \prec e_1$ et $\neg c \wedge d_2 \prec e_2$. Alors par (DV4'),

$$(c \wedge d_1) \vee (\neg c \wedge d_2) \prec e_1 \vee e_2.$$

Or

$$(c \wedge d_1) \vee (\neg c \wedge d_2) = (c \vee \neg c) \wedge (c \vee d_2) \wedge (d_1 \vee \neg c) \wedge (d_1 \vee d_2).$$

Comme $c \vee \neg c = 1$, $d_2 \leq c \vee d_2$, $d_1 \leq d_1 \vee \neg c$ et $d_1, d_2 \leq d_1 \vee d_2$, on a $(c \wedge d_1) \vee (\neg c \wedge d_2) \in y$. Puisque $\Uparrow y \subset x$, on a $e_1 \vee e_2 \in x$, ce qui est impossible car x est un ultrafiltre et $e_1, e_2 \notin x$. ■

À nouveau par la dualité de Stone, nous savons que les espaces $\mathbb{X}$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{OF}(\mathbb{X}))$ sont homéomorphes en tant qu'espaces topologiques. Il reste donc à démontrer la propriété suivante. Nous n'avons par encore utilisé le fait que $\equiv$ est fermé mais nous l'utilisons ici.

Proposition 3.40. *Si $\mathbb{X}$ est un espace de Gleason et ν est l'homéomorphisme canonique entre $\mathbb{X}$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{OF}(\mathbb{X}))$, alors $x \equiv y$ si et seulement si $\nu(x) \equiv \nu(y)$.*

Démonstration. Si $x \equiv y$, il faut montrer que $\Uparrow\nu(x) \subset \nu(y)$. Soit $U \in \Uparrow\nu(x)$. Il existe un ouvert-fermé $V \in \nu(x)$ tel que $V \prec U$, i.e. $x \in V$ et $\equiv[V] \subset U$. Ainsi $y \in U$ donc $U \in \nu(y)$.

Si $x \not\equiv y$, puisque $\equiv$ est fermé, il existe des ouverts-fermés U et V tel que $x \in U$, $y \in V$ et $\equiv[U] \cap V = \emptyset$. Posons $W = V^c$, on a $\equiv[U] \subset W$ donc $U \prec W$. Or $U \in \nu(x)$ donc $V \in \Uparrow\nu(x)$ et $W \notin \nu(y)$. Ainsi $\nu(x) \not\equiv \nu(y)$. ■

$$
\begin{tikzcd}
& \mathbf{Gle} \arrow[ld, shift left, "\mathfrak{Q}"] \arrow[rd, shift left, "\mathfrak{OF}"] & \\
\mathbf{KHaus} \arrow[ru, shift left, "\mathfrak{G}"] \arrow[rr, shift left, "\mathfrak{end}"] & & \mathbf{DeV} \arrow[lu, shift left, "\mathfrak{U}"] \arrow[ll, shift left, "\mathfrak{RO}"]
\end{tikzcd}
$$

FIGURE 3.2 – Équivalence et dualités entre **KHaus**, **Gle** et **DeV**.

Nous avons donc montré une dualité entre les espaces de Gleason et les algèbres de de Vries. Il est intéressant de remarquer que pour tout espace compact et séparé X, les espaces $\mathfrak{G}(X)$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{RO}(X))$ sont identiques. En particulier, le diagramme 3.2 commute.

Proposition 3.41. *Si X est un espace compact et séparé, alors les espaces de Gleason $\mathfrak{G}(X)$ et $\mathfrak{U}(\mathfrak{OF}(X))$ sont identiques.*

Démonstration. D'une part, on sait que $\mathfrak{G}(X)$ est l'espace des ultrafiltres de $\mathfrak{RO}(X)$ muni d'une relation. Il suffit donc de montrer que la relation sur $\mathfrak{G}(X)$ est la même que sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{RO}(X))$.

Deux ultrafiltres E, F sur $\mathfrak{RO}(X)$ sont équivalents sur $\mathfrak{G}(X)$ s'ils admettent la même limite. Ils sont équivalents sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{OF}(X))$ si $\uparrow E \subset F$. Montrons que ces deux notions sont les mêmes.

Tout découle du fait que si E converge vers x, alors $\uparrow E = \nu(x)$. En effet, si $U \in \nu(x)$, il existe par régularité $V \in \nu(x)$ tel que $\bar{V} \subset U$. Comme $V \in \nu(x)$, on a $V \in E$ donc $U \in \uparrow E$. Réciproquement, si $U \in \uparrow E$, il existe $V \in E$ tel que $\bar{V} \subset U$. Pour tout $W \in E$, on a $V \cap W \neq \emptyset$ donc $x \in \bar{V} \subset U$. Ainsi $U \in \nu(x)$. ■

Remarque 3.42. Il est également possible de définir des morphismes pour les espaces de Gleason. Ces morphismes sont obtenus en adaptant les propriétés des morphismes dans **DeV**, afin d'obtenir une dualité. Cependant, leur définition n'est pas très intuitive. De plus, la composition de ces morphismes est définie via la composition de **DeV** et ne peut pas s'exprimer simplement.

Nous présenterons dans le chapitre suivant de nouvelles catégories, basée sur les catégories du diagramme 3.2, plus générales et pour lesquelles il existe une équivalence beaucoup plus naturelle.

Chapitre 4

Prémorphismes et relations fermées

Dans ce chapitre, nous commençons par définir des morphismes entre espaces de Gleason et montrons une équivalence avec une catégorie d'espaces compacts et séparés. Nous généralisons ensuite le théorème d'Isbell à cette nouvelle catégorie d'espaces séparés.

4.1 Relations fermées

Dans le chapitre précédent, nous avons établi une correspondance entre les espaces de Gleason et les espaces compacts et séparés. Dans cette section, nous étendons cette correspondance en une équivalence de catégories.

4.1.1 Stabilité, composition

Rappelons qu'un espace de Gleason est un espace compact, séparé et extrêmement discontinu muni d'une relation d'équivalence fermée et irréductible.

Il est possible de montrer qu'à chaque fonction continue $f\colon X \to Y$ entre deux espaces compacts et séparés, il correspond une relation $R \subset \hat{X} \times \hat{Y}$ telle que les conditions suivantes sont satisfaites.

(R1) L'ensemble $R[x]$ est fermé pour tout $x \in \hat{X}$.

(R2) L'ensemble $R^{-1}[U]$ est un ouvert-fermé pour tout ouvert-fermé U de $\hat{Y}$.

Une telle relation est dite *booléenne*.

(R3) Pour tout $x \in \hat{X}$, il existe $y \in \hat{Y}$ tel que $x \; R \; y$.

(R4) Pour tous $x, x' \in \hat{X}$ et tous $y, y' \in \hat{Y}$, si $x \equiv x'$, $x \; Ry$ et $x' \; R \; y'$, alors $y \equiv y'$.

(R5) On a $R^{-1}[U] = R^{-1}[\equiv^{-1} [U]]^\circ$ pour tout ouvert-fermé U de $\hat{Y}$.

Ces relations ne sont pas faciles à manipuler. En particulier, la composition ne peut pas être décrite clairement.

Nous allons donc définir des relations plus simples, munies d'une composition plus élémentaire. Ensuite, nous étudierons la catégorie des espaces de Gleason dont les morphismes sont ces relations.

Définition 4.1. Une relation $R \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ entre deux espaces de Gleason est *stable* si

$$\equiv \circ R = R \circ \equiv = R, \tag{4.1}$$

i.e. si pour tous $x, x' \in \mathbb{X}$ et $y, y' \in \mathbb{Y}$ tels que $x \equiv x'$, $y \equiv y'$ et $x \; R \; y$ implique $x' \; R \; y'$.

Définissons maintenant la composition de relations.

Définition 4.2. Étant donné des relations $R \subset X \times Y$ et $R' \subset Y \times Z$, on définit la relation *composée* $R' \circ R$ par $x \; R' \circ R \; z$ si et seulement si il existe $y \in Y$ tel que $x \; R \; y$ et $y \; R' \; z$.

Étant donné une relation $R \subset X \times Y$, on définit son *inverse* $R^{-1} \subset Y \times X$ par $x \; R \; y$ si et seulement si $y \; R^{-1} \; x$.

Remarque 4.3. Si R et R' sont les graphes d'applications f et g, la relation $R' \circ R$ est le graphe de l'application $g \circ f$.

Par le Lemme 3.31, il est évident que la composée de deux relations fermées est une relation fermée. Il est également trivial de vérifier que la composée de deux relations stables entre espaces de Gleason est une relation stable. La définition suivante est donc légitime.

Définition 4.4. On note $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$ la catégorie dont les objets sont les espaces de Gleason, dont les morphismes sont les relations stables et fermées et pour laquelle la composition est la composition de relations.

Remarque 4.5. Étant donné un espace de Gleason $\mathbb{X}$, la relation $\equiv \subset \mathbb{X} \times \mathbb{X}$ est le morphisme identité sur $\mathbb{X}$. En effet, si $R \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, alors $R \circ \equiv = R$ vu la stabilité de R. Pareillement, si $R \subset \mathbb{Y} \times \mathbb{X}$, alors $\equiv \circ R = R$.

Nous définissons maintenant une catégorie d'espaces compacts et séparés.

Définition 4.6. On note $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$ la catégorie dont les objets sont les espaces compacts et séparés, dont les morphismes sont les relations fermées et pour laquelle la composition est la composition de relations.

Au vu du Lemme 3.31, la composition de relations fermées est encore fermée donc la composition a un sens.

Remarque 4.7. Une application $f\colon X \to Y$ entre deux espaces compacts et séparés est continue si et seulement si son graphe est fermé. Ainsi, la catégorie $\mathbf{KHaus}$ se plonge dans $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$.

Dans la suite, si f est une application continue, nous utiliserons le symbole f aussi bien pour la fonction que pour la relation fermée obtenue en prenant le graphe.

Remarque 4.8. Étant donné un espace compact et séparé X, la relation d'égalité

$$\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

est le morphisme identité. Il s'agit du graphe de l'application identité.

Il est intéressant de remarquer que les catégories $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$ et $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$ sont toutes les deux duales à elles-mêmes. En effet, le foncteur contravariant † égal à l'identité sur les objets et qui à une relation associe la relation inverse est une involution, i.e. est son propre inverse. De telles catégories sont appelées *†-catégories.*

Ces catégories ont également d'autres propriétés. L'ensemble des morphismes entre deux objets est un demi-treillis (en prenant l'intersection pour $\wedge$). Elles vérifient également certaines propriétés reliant l'involution † à l'intersection $\wedge$. De telles catégories sont appelées *allégories.* Le lecteur désireux d'en savoir plus peut consulter [8].

4.1.2 Équivalence

Nous allons maintenant montrer que les catégories $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$ et $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$ sont équivalentes. Ce résultat a été publié dans [1].

Commençons par décrire le passage des morphismes de $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$ à ceux de $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$.

Définition 4.9. Étant donné une relation fermée $R \subset X \times Y$ entre deux espaces compacts et séparés, on définit une relation $\mathfrak{G}(R) \subset \mathfrak{G}(X) \times \mathfrak{G}(Y)$ par

$$\mathfrak{G}(R) = \pi_2^{-1} \circ R \circ \pi_1, \tag{4.2}$$

où $\pi_1\colon \mathfrak{G}(X) \to X$ et $\pi_2\colon \mathfrak{G}(Y) \to Y$ sont les couvertures de Gleason.

Vérifions que $\mathfrak{G}(R)$ est bien un morphisme de $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$.

Proposition 4.10. *La relation $\mathfrak{G}(R)$ est stable et fermée.*

Démonstration. Comme π_1 et π_2 sont continus, les relations π_2 et π_2^{-1} sont fermées donc la relation $\mathfrak{G}(R)$ est fermée.

Elle est stable car si $x, x' \in \mathfrak{G}(X)$ et $y, y' \in \mathfrak{G}(Y)$ sont tels que $x \equiv x'$ et $y \equiv y'$, alors $\pi_1(x) = \pi_1(x')$ et $\pi_2(y) = \pi_2(y')$. Si $x\ \mathfrak{G}(R)\ y$, alors $\pi_1(x') = \pi_1(x)\ R\ \pi_2(y) = \pi_2(y')$ donc $x'\ \mathfrak{G}(R)\ y'$. ■

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "R"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{G}"] \arrow[dd, bend right=60, "\eta"'] & Y \arrow[d, dashed, "\mathfrak{G}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\eta"] \\
\mathfrak{G}(X) \arrow[r, "\mathfrak{G}(R)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{Q}"] & \mathfrak{G}(Y) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{Q}"'] \\
\mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(X)) \arrow[r, "\mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(R))"] & \mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(Y))
\end{tikzcd}$$

(a) Isomorphie pour $\mathfrak{Q} \circ \mathfrak{G}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X} \arrow[r, "R"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{Q}"] \arrow[dd, bend right=60, "\Gamma"'] & \mathbb{Y} \arrow[d, dashed, "\mathfrak{Q}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\Gamma"] \\
\mathfrak{Q}(\mathbb{X}) \arrow[r, "\mathfrak{Q}(R)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{G}"] & \mathfrak{Q}(\mathbb{Y}) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{G}"'] \\
\mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X})) \arrow[r, "\mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(R))"] & \mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{Y}))
\end{tikzcd}$$

(b) Isomorphie pour $\mathfrak{G} \circ \mathfrak{Q}$

FIGURE 4.1 – Composition des foncteurs $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{Q}$

Si $R \subset X \times Y$ et $R' \subset Y \times Z$ sont des relations entre des espaces compacts et séparés et si π_1, π_2 et π_3 désignent leurs couvertures de Gleason respectives, alors

$$\mathfrak{G}(R') \circ \mathfrak{G}(R) = \pi_3^{-1} \circ R' \circ \pi_2 \circ \pi_2^{-1} \circ R \circ \pi_1.$$

Comme π_2 est surjectif, $\pi_2 \circ \pi_2^{-1}$ est la relation identité donc

$$\mathfrak{G}(R') \circ \mathfrak{G}(R) = \pi_3^{-1} \circ R' \circ R \circ \pi_1 = \mathfrak{G}(R' \circ R). \tag{4.3}$$

Ainsi $\mathfrak{G}$ est un foncteur de $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$ dans $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$.

Décrivons maintenant le passage des morphismes de $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$ à ceux de $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$.

Définition 4.11. Étant donné une relation stable et fermée $R \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ entre deux espaces de Gleason, on définit la relation $\mathfrak{Q}(R) \subset \mathfrak{Q}(\mathbb{X}) \times \mathfrak{Q}(\mathbb{Y})$ par

$$\mathfrak{Q}(R) = \kappa_2 \circ R \circ \kappa_1^{-1}, \tag{4.4}$$

où $\kappa_1 \colon \mathbb{X} \to \mathfrak{Q}(\mathbb{X})$ et $\kappa_2 \colon \mathbb{Y} \to \mathfrak{Q}(\mathbb{Y})$ sont les applications quotients.

À nouveau, comme les applications κ_1 et κ_2 sont continues, la relation $\mathfrak{Q}(R)$ est une relation fermée.

Théorème 4.12. *La catégorie* $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$ *est équivalente à la catégorie* $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$*.*

Démonstration. Si X est un espace compact et séparé, nous savons, par le Théorème 3.26, que X est homéomorphe à $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(X))$ par

$$\eta \colon X \to \mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(X)) \quad x \mapsto \kappa \circ \pi^{-1}(x).$$

Soit $R \subset X \times Y$ une relation fermée entre deux espaces compacts et séparés. Il faut montrer que $\mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(R)) \circ \eta = \eta \circ R$. C'est évident car

$$\mathfrak{Q}(\mathfrak{G}(R)) \circ \eta = \underbrace{\kappa_2 \circ \pi_2^{-1}}_{=\eta} \circ R \circ \pi_1 \circ \underbrace{\kappa_1^{-1} \circ \eta}_{=\pi_1^{-1}} = \eta \circ R.$$

Ainsi le diagramme 4.1a commute.

Si $\mathbb{X}$ est un espace de Gleason, nous savons qu'il existe un homéomorphisme d'espaces de Gleason $\rho \colon \mathbb{X} \to \mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X}))$. Cependant, cet homéomorphisme n'est pas forcement un morphisme dans $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$ car il peut ne pas être stable.

Un morphisme Γ dans $\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$ est un isomorphisme s'il existe une relation $\Delta \subset \mathbb{Y} \times \mathbb{X}$ stable et fermée telle que $\Gamma \circ \Delta$ est la relation $\equiv$ de Y et $\Delta \circ \Gamma$ est la relation $\equiv$ de $\mathbb{X}$. Nous devons donc construire une relation $\Gamma \subset \mathbb{X} \times \mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X}))$ et montrer que c'est un isomorphisme.

Soient $\kappa \colon \mathbb{X} \to \mathfrak{Q}(\mathbb{X})$ l'application quotient et $\pi \colon \mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X})) \to \mathfrak{Q}(\mathbb{X})$ la couverture de Gleason. Posons

$$\Gamma = \pi^{-1} \circ \kappa,$$

i.e. $x \, \Gamma \, y$ si et seulement si $\kappa(x) = \pi(y)$. Comme κ et π sont continus, il est clair que Γ est fermé. De plus, dans $\mathbb{X}$, on a $x \equiv x'$ si et seulement si $\kappa(x) = \kappa(x')$ et dans $\mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X}))$, on a $y \equiv y'$ si et seulement si $\pi(y) = \pi(y')$ donc il est évident que Γ est stable. Finalement, on a

$$\Gamma \circ \Gamma^{-1} = \pi^{-1} \circ \kappa \circ \kappa^{-1} \circ \pi = \pi^{-1} \circ \pi,$$

qui est la relation $\equiv$ sur $\mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(\mathbb{X}))$, et

$$\Gamma^{-1} \circ \Gamma = \kappa^{-1} \circ \pi \circ \pi^{-1} \circ \kappa = \kappa^{-1} \circ \kappa,$$

qui est la relation $\equiv$ sur $\mathbb{X}$. Ainsi Γ est un isomorphisme. Remarquons également que si $R \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ est une relation stable et fermée entre deux espaces de Gleason, on a

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{Q}(R)) \circ \Gamma = \pi_2^{-1} \circ \kappa_2 \circ R \circ \kappa_1^{-1} \circ \pi_1 \circ \pi_1^{-1} \circ \kappa_1 = \pi_2^{-1} \circ \kappa_2 \circ R = \Gamma \circ R.$$

Ainsi le diagramme 4.1b commute. ■

4.2 Frames et prémorphismes

Nous avons vu dans le premier chapitre que les catégories **KHaus** et **KRFrm** sont duales. Nous avons vu dans la section précédente que la catégorie **KHaus** se plonge dans une catégorie $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$. Nous allons maintenant montrer que la catégorie **KRFrm** se plonge dans une catégorie $\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$. Nous montrerons ensuite que la catégorie $\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$ est duale à la catégorie $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$.

4.2.1 Prémorphismes

Pour définir la catégorie $\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$, nous devons donner une définition moins restrictive pour les morphismes.

Définition 4.13. Un sous-ensemble non vide D d'un frame L est *dirigé* si pour tous $a, b \in D$, il existe $c \in D$ tel que $a, b \leq c$.

Dans ce cas, $\bigvee D$ sera noté $\bigsqcup D$ pour insister sur le fait que D est dirigé.

Définition 4.14. Un *prémorphisme de frames* est une application $\Box\colon K \to L$ entre deux frames qui préserve les bornes inférieures finies et les bornes supérieures dirigées, i.e. telle que

$$\Box\left(\bigwedge T\right) = \bigwedge \Box(T) \tag{4.5}$$

pour tout $T \subset K$ fini et

$$\Box\left(\bigsqcup D\right) = \bigsqcup \Box(D) \tag{4.6}$$

pour tout $D \subset K$ dirigé. En particulier, un prémorphisme de frames $\Box$ est croissant et satisfait $\Box 1 = 1$ et $\Box(a \wedge b) = \Box a \wedge \Box b$.

Remarque 4.15. Si $\Box\colon K \to L$ est une application croissante et $D \subset K$ un ensemble dirigé, alors $\Box(D)$ est encore dirigé. En effet, $\Box(D)$ est non vide et si $\Box a, \Box b \in \Box(D)$, il existe $c \in D$ tel que $a, b \leq c$ donc $\Box a, \Box b \leq \Box c$. Comme $\Box c \in \Box(D)$, l'ensemble $\Box(D)$ est dirigé.

Ceci justifie l'écriture de $\bigsqcup \Box(D)$ dans la définition précédente.

Au vu de la Remarque 4.15, il est évident que la composition de deux prémorphismes est encore un prémorphisme.

Définition 4.16. On note $\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$ la catégorie dont les objets sont les frames compacts et réguliers et dont les morphismes sont les prémorphismes de frames.

Remarquons que tout homomorphisme de frames est un prémorphisme de frames. Par conséquent, **KRFrm** est une sous-catégorie de $\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$.

Remarque 4.17. Il est possible de définir une topologie sur les éléments d'un frame. Cette topologie est appelé *topologie de Scott*. Les fonctions continues pour la topologie de Scott sont alors exactement les fonctions préservant les bornes supérieures dirigées. L'étude de ces applications continues a des applications en informatique, ce qui motive l'étude de la catégorie $\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$. Le lecteur peut consulter [9] pour plus de détails.

4.2.2 Dualité

Nous savons que **KHaus** et **KRFrm** sont des catégories duales. Pour montrer que $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$ et $\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$ sont duales, nous utilisons les mêmes foncteurs. Nous devons cependant donner un sens à $\mathfrak{O}(R)$ lorsque R est une relation fermée et à $\mathfrak{pt}(\square)$ lorsque $\square$ est un prémorphisme. Les constructions présentées dans cette section ainsi que la preuve de la dualité peuvent être trouvée dans [14].

Commençons par donner un sens à $\mathfrak{O}(R)$.

Définition 4.18. Étant donné une relation fermée $R\colon X \to Y$ entre deux espaces compacts et séparés, on définit le prémorphisme de frames

$$\mathfrak{O}(R)\colon \mathfrak{O}(Y) \to \mathfrak{O}(X) \quad U \mapsto R^{-1}[U^c]^c. \tag{4.7}$$

Vu sa définition et le Lemme 3.31, $\mathfrak{O}(R)$ envoie bien des ouverts sur des ouverts. Vérifions que c'est un prémorphisme.

Proposition 4.19. *L'application $\mathfrak{O}(R)\colon \mathfrak{O}(Y) \to \mathfrak{O}(X)$ est un prémorphisme de frames.*

Démonstration. On a

$$\mathfrak{O}(R)(U \cap V) = R^{-1}[(U \cap V)^c]^c = R^{-1}[U^c \cup V^c]^c.$$

Tout comme l'image inverse par une fonction, l'image inverse par une relation commute avec l'union. Ainsi,

$$\mathfrak{O}(R)(U \cap V) = (R^{-1}[U^c] \cup R^{-1}[V^c])^c = R^{-1}[U^c]^c \cap R^{-1}[V^c]^c = \mathfrak{O}(R)(U) \cap \mathfrak{O}(R)(V).$$

En particulier, $\mathfrak{O}(R)$ est une application croissante.

Si $D \subset \mathfrak{O}(Y)$ est dirigé, on a

$$\mathfrak{O}(R)\left(\bigsqcup D\right) = R^{-1}\left[\left(\bigsqcup D\right)^c\right]^c = R^{-1}\left[\bigcap_{U \in D} U^c\right]^c$$

et

$$\bigsqcup \mathfrak{O}(R)(D) = \bigsqcup_{U \in D} R^{-1}[U^c]^c = \left(\bigcap_{U \in D} R^{-1}[U^c]\right)^c.$$

Pour montrer que $\mathfrak{O}(R)$ préserve les bornes supérieures dirigées, nous devons donc montrer que

$$R^{-1}\left[\bigcap_{U \in D} U^c\right] = \bigcap_{U \in D} R^{-1}[U^c].$$

Comme $\bigcap_{U \in D} U^c \subset V^c$ pour tout $V \in D$, l'inclusion $\subset$ est évidente.

Montrons l'autre inclusion. Soit

$$x \in \bigcap_{U \in D} R^{-1}[U^c].$$

Alors pour tout $U \in D$, $R[x] \cap U^c$ est un fermé non vide. Si $U_1, \ldots, U_n \in D$, il existe $V \in D$ tel que $\bigcup_{i=1}^n U_i \subset V$, donc

$$\bigcap_{i=1}^n R[x] \cap U_i^c \supset R[x] \cap V^c \neq \emptyset.$$

Ainsi la famille $\{R[x] \cap U : U \in D\}$ a la fip donc

$$\bigcap_{U \in D} R[x] \cap U^c = R[x] \cap \bigcap_{U \in D} U^c \neq \emptyset,$$

ce qui équivaut à

$$x \in R^{-1}\left[\bigcap_{U \in D} U^c\right].$$

Ainsi l'inclusion $\supset$ est vérifiée. ■

Il est évident que si $R\colon X \to Y$ et $R'\colon Y \to Z$ sont des relations fermées, et U un ouvert de Z, alors

$$\mathfrak{O}(R' \circ R)(U) = (R' \circ R)^{-1}[U^c]^c = R^{-1}[R'^{-1}[U^c]]^c = R^{-1}[R'^{-1}[U^c]^{cc}]^c = \mathfrak{O}(R) \circ \mathfrak{O}(R')(U). \tag{4.8}$$

Ainsi $\mathfrak{O}$ est un foncteur contravariant de $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$ dans $\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$.

Donnons maintenant un sens à $\mathfrak{pt}(\Box)$.

Définition 4.20. Étant donné un prémorphisme de frames $\Box\colon K \to L$, on définit la relation $\mathfrak{pt}(\Box)$: $\mathfrak{pt}(L) \to \mathfrak{pt}(K)$ par $p\ \mathfrak{pt}(\Box)\ q$ si et seulement si $p \circ \Box \leq q$, i.e. pour tout $a \in K$, on a $p(\Box a) \leq q(a)$.

Il faut vérifier que cette relation est fermée.

Proposition 4.21. *La relation $\mathfrak{pt}(\Box)$ est fermée.*

Démonstration. Soit $(p, q) \notin \mathfrak{pt}(\Box)$. Il existe $a \in K$ tel que $p(\Box a) = 1$ et $q(a) = 0$

Remarquons que $\{b : b \prec a\}$ est un ensemble dirigé. En effet, si $b, c \prec a$, alors $\neg b \vee a = 1$ et $\neg c \vee a = 1$. On a

$$\neg(b \vee c) = \bigvee\{d : d \wedge (b \vee d) = 0\} = \bigvee\{d : d \wedge b = 0\} \wedge \{d : e \wedge c = 0\} = \neg b \wedge \neg c.$$

Ainsi $\neg(b \vee c) \vee a = (\neg b \vee a) \wedge (\neg c \vee a) = 1$ donc $b \vee c \prec a$.

Comme $p \circ \Box$ conserve les bornes supérieures dirigées et que $a = \bigsqcup\{b : b \prec a\}$, il existe $b \prec a$ tel que $p(\Box b) = 1$. Par la Proposition 1.18 appliquée à l'idéal $q^{-1}(0)$, on a $q(\neg b) = 1$. Ainsi $q \in \phi(\neg b)$, $p \in \phi(\Box b)$ et $\mathfrak{pt}(\Box)(\phi(\neg b)) \cap \phi(\Box b) = \emptyset$ donc par le Lemme 3.31, la relation $\mathfrak{pt}(\Box)$ est fermée. ■

Théorème 4.22. *La catégorie $\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$ est duale à la catégorie $\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$.*

Démonstration. Si X est un espace compact et séparé, nous savons que X est homéomorphe à $\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(X))$ par

$$\begin{aligned} \theta\colon X &\to \mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(X)) \\ x &\mapsto \theta(x)\colon \quad \mathfrak{O}(X) \to \mathbf{2} \\ &\qquad\qquad\qquad U \mapsto x \in U. \end{aligned}$$

Soit $R \subset X \times Y$ une relation fermée. Il faut montrer que $\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(R)) \circ \theta = \theta \circ R$, ou encore que $x\ R\ y$ si et seulement si $\theta(x)\ \mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(R))\ \theta(y)$. On a

$$\theta(x)\ \mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(R))\ \theta(y) \iff \theta(x) \circ \mathfrak{O}(R) \leq \theta(y),$$

i.e. si et seulement si pour tout U ouvert de Y, $x \in R^{-1}[U^c]^c$ implique $y \in U$. Or

$$x \in R^{-1}[U^c]^c \iff x \notin R^{-1}[U^c] \iff R[x] \cap U^c = \emptyset \iff R[x] \subset U.$$

Ainsi, on a $\theta(x)\ \mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(R))\ \theta(y)$ si et seulement si pour tout ouvert U contenant $R[x]$, on a $y \in U$. Comme $R[x]$ est toujours fermé et Y est séparé, c'est équivalent à $y \in R[x]$, ou encore à $x\ R\ y$. Ainsi le diagramme 4.2a commute.

Si K est un frame, nous savons que K est isomorphe à $\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(K))$ par

$$\phi\colon K \to \mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(K)) \quad a \mapsto \{p \in \mathfrak{pt}(K) : p(a) = 1\}.$$

Si $\Box$ est un prémorphisme de frames, il faut montrer que $\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(\Box)) \circ \phi = \phi \circ \Box$. Pour tout $a \in K$, on a

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(\Box))(\phi(a)) = \mathfrak{pt}(\Box)^{-1}[\phi(a)^c]^c = \{p \in \mathfrak{pt}(L) : \mathfrak{pt}(\Box)[p] \subset U\}.$$

Or

$$\mathfrak{pt}(\Box) \circ p \subset \phi(a) \iff p \circ \Box \leq q \text{ implique } q(a) = 1 \text{ pour tout } q \in \mathfrak{pt}(K).$$

Si $p(\Box a) = 1$, l'implication est évidente. Si $p(\Box a) = 0$, alors $a \in \Box^{-1}(p^{-1}(0))$. C'est un idéal premier donc il contient un idéal propre premier J contenant a[1]. Soit

$$q\colon K \to \mathbf{2} \quad b \mapsto b \notin J.$$

1. Soit $\Box^{-1}(p^{-1}(0))$ est propre et donc est un idéal propre premier contenant a, soit c'est un idéal impropre et n'importe quel idéal propre premier contenant a convient.

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "R"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{pt}"] \arrow[dd, bend right=60, "\phi"'] & L \arrow[d, dashed, "\mathfrak{pt}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\phi"] \\
\mathfrak{pt}(K) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{O}"] & \mathfrak{pt}(L) \arrow[l, "\mathfrak{pt}(R)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{O}"'] \\
\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(K)) \arrow[r, "\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(R))"] & \mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(L))
\end{tikzcd}$$

(a) Isomorphie pour $\mathfrak{O} \circ \mathfrak{pt}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Box"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{O}"] \arrow[dd, bend right=60, "\theta"'] & Y \arrow[d, dashed, "\mathfrak{O}"'] \arrow[dd, bend left=60, "\theta"] \\
\mathfrak{O}(X) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{pt}"] & \mathfrak{O}(Y) \arrow[l, "\mathfrak{O}(\Box)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{pt}"'] \\
\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(X)) \arrow[r, "\mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(\Box))"] & \mathfrak{pt}(\mathfrak{O}(Y))
\end{tikzcd}$$

(b) Isomorphie pour $\mathfrak{pt} \circ \mathfrak{O}$

FIGURE 4.2 – Composition des foncteurs $\mathfrak{pt}$ et $\mathfrak{O}$

Alors $p \circ \Box \leq q$ mais $q(a) = 0$ donc l'implication est fausse. Nous avons donc montré que

$$p \circ \Box \leq q \text{ implique } q(a) = 1 \text{ pour tout } q \in \mathfrak{pt}(K) \iff p(\Box a) = 1.$$

Ainsi,

$$\mathfrak{O}(\mathfrak{pt}(\Box))(\phi(a)) = \{p \in \mathfrak{pt}(L) : p(\Box a) = 1\} = \phi(\Box a)$$

donc le diagramme 4.2b commute. ∎

Conclusion

Nous avons commencé ce travail en démontrant que tout espace compact et séparé peut être vu comme un espace de points d'un frame compact et régulier, et que tout frame compact et régulier peut être vu comme un frame d'ouverts d'un espace compact et séparé. Nous avons établi une dualité similaire pour les morphismes entre ces structures, obtenant ainsi une dualité entre **KHaus** et **KRFrm**. Cette dualité est connue sous le nom de dualité d'Isbell.

Nous avons ensuite prouvé que ces mêmes espaces compacts et séparés pouvaient être représentés comme des espaces de points d'algèbres de de Vries, et que les algèbres de de Vries pouvaient être vues comme des algèbres d'ouverts réguliers. À nouveau, nous avons établi une dualité similaire pour les morphismes, obtenant une dualité entre **KHaus** et **DeV**. Cette dualité est connue sous le nom de dualité de de Vries.

Nous avons ensuite utilisé les couvertures de Gleason pour montrer une équivalence purement topologique faisant intervenir les espaces compacts et séparés. Cette fois ci, la correspondance pour les morphismes était trop compliquée pour être exposée dans ce travail, ce qui nous a motivés à considérer des catégories plus générales.

En travaillant dans des catégories dont les morphismes sont des relations plutôt que des fonctions, nous avons établi une équivalence généralisant l'équivalence de Gleason. Nous avons constaté que ces nouvelles catégories permettaient également de généraliser la dualité d'Isbell. Par contre, la dualité de de Vries ne peut pas être généralisée, comme on peut le voir dans [1, Rem. 3.14].

Il est légitime de se demander s'il est possible de considérer une catégorie plus générale que la catégorie des espaces compacts séparés et des fonctions continues, mais moins générale que la catégorie des espaces compacts séparés et des relations fermées, de sorte que les dualités d'Isbell, de de Vries ainsi que l'équivalence de Gleason soient valides. La réponse est oui, une telle catégorie est étudiée dans [1, Sec. 4]. Il s'agit de la catégorie dont les objets sont les espaces compacts et séparés et dont les morphismes sont les relations fermées R telle que $R^{-1}[U]$ est ouvert pour tout U ouvert.

En combinant la dualité entre **KRFrm** et **KHaus** avec celle entre **KHaus** et **DeV**, il est évident que les catégories **KRFrm** et **DeV** sont équivalentes. L'équivalence est obtenue en composant les foncteurs $\mathfrak{RO}$ et $\mathfrak{pt}$. De plus, le résultat de cette composition est un foncteur qui à un frame d'ouvert associe l'algèbre des ouverts réguliers, ce qui laisse penser que l'on peut obtenir une algèbre de de Vries à partir d'un frame compact et régulier en ne conservant que certains éléments suffisamment « réguliers ». Cette

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Gle} \arrow[d, shift left, "\mathfrak{Q}"] \arrow[ddr, bend left, "\mathfrak{OF}"] & \\
& \mathbf{KHaus} \arrow[u, shift left, "\mathfrak{G}"] \arrow[dl, shift left, "\mathfrak{O}"] \arrow[dr, shift left, "\mathfrak{RO}"] & \\
\mathbf{KRFrm} \arrow[ur, shift left, "\mathfrak{pt}"] & & \mathbf{DeV} \arrow[ul, shift left, "\mathfrak{end}"] \arrow[uul, bend right, "\mathfrak{U}"']
\end{tikzcd}$$

(a) Fonctions

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Gle}^R \arrow[d, shift left, "\mathfrak{Q}"] \\
& \mathbf{KHaus}^R \arrow[u, shift left, "\mathfrak{G}"] \arrow[dl, shift left, "\mathfrak{O}"] \\
\mathbf{KRFrm}^R \arrow[ur, shift left, "\mathfrak{pt}"] &
\end{tikzcd}$$

(b) Relations

FIGURE 4.3 – Équivalence et dualités

construction est en effet possible et est étudiée en détail dans [3].

Nous avons utilisé la dualité de de Vries pour démontrer la dualité de Stone pour les algèbres complètes. En utilisant une approche différente, il est possible d'utiliser la dualité de de Vries pour démontrer la dualité de Stone pour les algèbres quelconques. Le lecteur pourra consulter [2] pour plus de détails.

Annexe A

Théorie des catégories

Nous introduisons ici quelques rudiments de théorie des catégories. L'ouvrage [16] est une excellente référence sur le sujet. On pourra aussi consulter [15].

A.1 Définition

Définition A.1. Une *catégorie* est la donnée

- d'une classe d'*objets* $\mathcal{O}$,
- d'une classe de *morphismes* $\mathcal{M}$,
- de deux applications dom et im de $\mathcal{M}$ dans $\mathcal{O}$.

En général, $f \in \mathcal{M}, \mathrm{dom}(f) = A, \mathrm{im}(f) = B$ sera noté $f \colon A \to B$.

En plus de cela, il faut

- une opération de composition $\circ$ qui à $f \colon A \to B$ et $g \colon B \to C$ associe $g \circ f \colon A \to C$, qui est associative, i.e. telle que le diagramme A.1a commute,
- pour chaque objet B, un morphisme $\mathrm{id} \colon B \to B$ identité, i.e. tel que le diagramme A.1b commute.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & \\
 & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

(a) Associativité

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "g"] & \\
 & B \arrow[r, "g"] & C
\end{tikzcd}$$

(b) Identité

FIGURE A.1 – Propriétés à satisfaire

Exemple. La catégorie **Set** est la catégorie dont les objets sont les ensembles et dont les morphismes sont les fonctions entre ensembles. La composition est la composition entre fonction et le morphisme identité est donné par la fonction identité sur chaque ensemble.

Exemple. La catégorie **Grp** dont les objets sont les groupes et dont les morphismes sont les homomorphismes de groupes.

Exemple. La catégorie **Top** dont les objets sont les espaces topologiques et dont les morphismes sont les applications continues.

Exemple. Étant donné un ensemble préordonné P, la catégorie $\mathbf{P}$ a pour objets les éléments de P et pour morphismes les paires $(x, y) \in P^2$ avec $x \leq y$. On pose $\mathrm{dom}(x, y) = x$ et $\mathrm{im}(x, y) = y$. Si $x \in P$ est un objet, l'identité sur x est le morphisme (x, x). Cette exemple montre que les morphismes d'une catégorie ne sont pas forcément des fonctions.

Définition A.2. Étant donné une catégorie $\mathbf{K}$, la *catégorie opposée*, noté $\mathbf{K^{op}}$, est la catégorie obtenue en échangeant dom et im, i.e. $f\colon A \to B$ dans $\mathbf{K}$ correspond à $f\colon B \to A$ dans $\mathbf{K^{op}}$.

Exemple. Si l'on continue l'exemple précédent, la catégorie $\mathbf{P^{op}}$ est la catégorie dont les objets sont les éléments de P et par laquelle il existe un morphisme $x \to y$ si et seulement si $y \leq x$. Nous aurions également pu obtenir cette catégorie en considérant la catégorie associée au préordre dual de $\leq$.

Définition A.3. Dans une catégorie $\mathbf{K}$, un morphisme $f\colon A \to B$ est un *isomorphisme* s'il possède un inverse, i.e. s'il existe un morphisme $g\colon B \to A$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}$ et $g \circ f = \mathrm{id}$.

A.2 Foncteurs

Les foncteurs sont les morphismes de catégories.

Définition A.4. Un *foncteur* $\mathfrak{T}$ entre deux catégories $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ est la donnée

- d'une application qui à tout objet A de $\mathbf{K}$ associe un objet $\mathfrak{T}(A)$ de $\mathbf{L}$,
- d'une application qui à un morphisme $f\colon A \to B$ de $\mathbf{K}$ associe un morphisme $\mathfrak{T}(f)\colon \mathfrak{T}(A) \to \mathfrak{T}(B)$ de $\mathbf{L}$.

tel que

- si $\mathrm{id}\colon A \to A$ est un morphisme identité dans $\mathbf{K}$, alors $\mathfrak{T}(\mathrm{id})\colon \mathfrak{T}(A) \to \mathfrak{T}(A)$ est un morphisme identité dans $\mathbf{L}$,
- $\mathfrak{T}(g \circ f) = \mathfrak{T}(g) \circ \mathfrak{T}(f)$ où le premier $\circ$ est celui de $\mathbf{K}$ et le second celui de $\mathbf{L}$.

Exemple. Le foncteur d'oubli $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ qui à un groupe associe l'ensemble de ses éléments et "oublie" l'opération. À un morphisme de groupes, il associe la fonction d'ensemble correspondante, en "oubliant" qu'il s'agit d'un morphisme.

Exemple. On définit le foncteur $\pi_0\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ qui à tout espace topologique X associe l'ensemble $\pi_0(X)$ de ses composantes connexes. Si $f\colon X \to Y$ est une application continue, l'image d'une composante de X est connexe donc incluse dans une composante de Y. Ainsi, on peut définir $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ qui à une composante C de X associe la composante de Y dans laquelle $f(C)$ est incluse. On vérifie aisément qu'il s'agit d'un foncteur.

Exemple. Au cours de géométrie, on démontre qu'à tout espace affine (euclidien) $\mathcal{A}$ est associé un espace vectoriel (euclidien) $\vec{\mathcal{A}}$ et à toute application affine (isométrique) $\mathcal{T}$ est associée une application linéaire (isométrique) $\vec{\mathcal{T}}$. Il s'agit d'un foncteur $\vec{\cdot}\colon \mathbf{Aff} \to \mathbf{Vec}$. Ce foncteur se restreint de $\vec{\cdot}\colon \mathbf{AffEucl}$ dans $\mathbf{VecEucl}$.

Définition A.5. Un *foncteur contravariant* entre deux catégories $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ est un foncteur entre les catégories $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L^{op}}$. Un foncteur contravariant $\mathfrak{T}$ associe donc à chaque objet A de $\mathbf{K}$ un objet $\mathfrak{T}(A)$ de $\mathbf{L}$ et à chaque morphisme $f\colon A \to B$ un morphisme $\mathfrak{T}(f)\colon \mathfrak{T}(B) \to \mathfrak{T}(A)$. On a aussi $\mathfrak{T}(g \circ f) = \mathfrak{T}(f) \circ \mathfrak{T}(g)$.

Exemple. Le foncteur $\mathfrak{P}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ qui à un ensemble E associe l'ensemble de ses parties et à une fonction $f\colon E \to F$ associe $\mathfrak{P}(f)\colon \mathfrak{P}(F) \to \mathfrak{P}(E) \quad S \mapsto f^{-1}(S)$ est contravariant.

A.3 Équivalences et dualités

Définition A.6. Un foncteur $\mathfrak{T}\colon \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ est *essentiellement surjectif* si tout objet de $\mathbf{L}$ est isomorphe à un objet de la forme $\mathfrak{T}(A)$ où A est un objet de $\mathbf{K}$.

Un foncteur $\mathfrak{T}\colon \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ est *plein* si pour tous objets A, B de $\mathbf{K}$ et tout morphisme $g\colon \mathfrak{T}(A) \to \mathfrak{T}(B)$, il existe $f\colon A \to B$ tel que $\mathfrak{T}(f) = g$.

Un foncteur $\mathfrak{T}\colon \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ est *fidèle* si pour tous morphismes $f, g\colon A \to B$ de $\mathbf{K}$, $\mathfrak{T}(f) = \mathfrak{T}(g)$ implique $f = g$.

Proposition A.7. *Soit $\mathfrak{T}\colon \mathbf{K} \to \mathbf{L}$ un foncteur essentiellement surjectif, plein et fidèle. Alors pour tous objets A, B de $\mathbf{K}$, si $\mathfrak{T}(A)$ et $\mathfrak{T}(B)$ sont isomorphes, alors A et B aussi.*

De plus, il existe un foncteur $\mathfrak{S}$ inverse de $\mathfrak{T}$, i.e. tel que

— *pour tout objet A de $\mathbf{K}$, $\mathfrak{S}(\mathfrak{T}(A))$ est isomorphe à A par un isomorphisme i,*

— *pour tout objet C de $\mathbf{L}$, $\mathfrak{T}(\mathfrak{S}(C))$ est isomorphe à C par un isomorphisme j,*

— *pour tout morphisme $f\colon A \to B$ dans $\mathbf{K}$, le diagramme A.2a commute,*

— *pour tout morphisme $g\colon C \to D$ dans $\mathbf{L}$, le diagramme A.2b commute.*

Réciproquement, si un foncteur $\mathfrak{T}$ possède un inverse, alors il est essentiellement surjectif, plein et fidèle.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{T}"] \arrow[dd, bend right, "i"'] & B \arrow[d, dashed, "\mathfrak{T}"'] \arrow[dd, bend left, "i"] \\
\mathfrak{T}(A) \arrow[r, "\mathfrak{T}(f)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{S}"] & \mathfrak{S}(B) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{S}"'] \\
\mathfrak{S}(\mathfrak{T}(A)) \arrow[r, "\mathfrak{S}(\mathfrak{T}(f))"] & \mathfrak{S}(\mathfrak{T}(B))
\end{tikzcd}$$

(a) Isomorphie pour $\mathfrak{S} \circ \mathfrak{T}$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{S}"] \arrow[dd, bend right, "j"'] & D \arrow[d, dashed, "\mathfrak{S}"'] \arrow[dd, bend left, "j"] \\
\mathfrak{S}(C) \arrow[r, "\mathfrak{S}(g)"'] \arrow[d, dashed, "\mathfrak{T}"] & \mathfrak{T}(D) \arrow[d, dashed, "\mathfrak{T}"'] \\
\mathfrak{T}(\mathfrak{S}(C)) \arrow[r, "\mathfrak{T}(\mathfrak{S}(g))"] & \mathfrak{T}(\mathfrak{S}(D))
\end{tikzcd}$$

(b) Isomorphie pour $\mathfrak{T} \circ \mathfrak{S}$

FIGURE A.2 – Composition des foncteurs $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{S}$

Définition A.8. Une *équivalence* entre deux catégories est un foncteur essentiellement surjectif, plein et fidèle.

Une *dualité* est un foncteur contravariant, essentiellement surjectif, plein et fidèle.

Ce travail contient de nombreux exemples d'équivalences et de dualités.

A.4 Objets initiaux, terminaux et points

Définition A.9. Un *objet initial* dans une catégorie est un objet $\mathbf{0}$ tel que pour tout objet A, il existe un unique morphisme $!\colon \mathbf{0} \to A$.

Un *objet terminal* dans une catégorie est un objet $\mathbf{1}$ tel que pour tout objet A, il existe un unique morphisme $!\colon A \to \mathbf{1}$.

Bien sûr, les objets initiaux de $\mathbf{K}$ sont les objets terminaux de $\mathbf{K}^{\mathbf{op}}$ et vice versa.

Exemple. Le seul objet initial de **Set** est l'ensemble vide et les objets terminaux sont les ensembles à un élément (ce qui explique les notations $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$).

Dans la catégorie **Grp**, le groupe trivial joue le rôle d'objet initial et terminal.

Proposition A.10. *Dans une catégorie, tous les objets initiaux sont isomorphes et tous les objets terminaux sont isomorphes.*

Définition A.11. Dans une catégorie dans laquelle les objets terminaux existent, un *point* d'un objet C est un morphisme $p\colon \mathbf{1} \to C$.

Exemple. Dans la catégorie des espaces affines, les objets terminaux sont les espaces de dimension 0. Un point d'un espace $\mathcal{A}$ est alors une application (affine) $p\colon \{0\} \to \mathcal{A}$, ce qui correspond bien à la notion géométrique de point.

Annexe B

Topologie

B.1 Ouverts et fermés réguliers, espaces réguliers

Dans cette section, nous donnons une définition de régularité pour les ouverts d'un espace topologique. Nous introduisons également la régularité pour un espace topologique et démontrons quelques résultats utiles faisant intervenir ces notions.

Définition B.1. Un ouvert U d'un espace topologique est *régulier* si $U^{-\circ} = U$.
Un fermé F est *régulier* si $F^{\circ-} = F$.

Proposition B.2. *Si $\mathfrak{O}(X)$ désigne l'ensemble des ouverts d'un espace topologique X et $\mathfrak{F}(X)$ l'ensemble de ses fermés, alors $\bar{\cdot}\colon \mathfrak{O}(X) \to \mathfrak{F}(X)$ et $\cdot^\circ\colon \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{O}(X)$ forment une correspondance de Galois. Les fermés de $\mathfrak{O}(X)$ sont les ouverts réguliers et les fermés de $\mathfrak{F}(X)$ sont les fermés réguliers.*

En particulier, pour tout U ouvert, $\bar{U}$ est un fermé régulier et pour tout F fermé, F° est un ouvert régulier. De plus, $\bar{\cdot}$ et $\cdot^\circ$ donnent une correspondance entre les ouverts réguliers et les fermés réguliers.

Démonstration. En effet, si U est ouvert et F fermé, on a

$$\bar{U} \subset F \iff U \subset F \iff U \subset F^\circ.$$

■

Proposition B.3. *Étant donné un espace topologique X, pour tout $E \subset X$, on a $E^{-\circ-\circ} = E^{-\circ}$ et $E^{\circ-\circ-}$, autrement dit, $E^{-\circ}$ est un ouvert régulier et $E^{\circ-}$ est un fermé régulier.*

Proposition B.4. *Étant donné un espace topologique X, pour tout $E \subset X$, on a*

$$E^\circ \subset E^{\circ-\circ} \subset \begin{Bmatrix} E^{-\circ} \\ E^{\circ-} \end{Bmatrix} \subset E^{-\circ-} \subset E^-. \tag{B.1}$$

Proposition B.5. *Pour tous U, V ouverts d'un espace topologique, on a*

$$(U \cap V)^{-\circ} = U^{-\circ} \cap V^{-\circ}. \tag{B.2}$$

Pour tous F, G fermés d'un espace topologique, on a

$$(F \cup G)^{\circ-} = F^{\circ-} \cup G^{\circ-}. \tag{B.3}$$

Démonstration. D'une part, $U \cap V \subset U, V$ donc $(U \cap V)^{-\circ} \subset U^{-\circ}, V^{-\circ}$. D'autre part, si $x \in U^{-\circ} \cap V^{-\circ}$, il existe un ouvert O contenant x tel que $O \subseteq \bar{U} \cap \bar{V}$. Montrons que $O \subseteq (U \cap V)^-$. Soit $y \in O$ et O' un voisinage ouvert de y inclus dans O. Comme $y \in \bar{U}$, on a $O' \cap U \neq \emptyset$. Soit $z \in O' \cap U$. Alors $z \in O$ donc $z \in \bar{V}$, et comme $O' \cap U$ est un voisinage de z, on a $O' \cap U \cap V \neq \emptyset$. Donc $y \in (U \cap V)^-$ ■

Définition B.6. Un espace topologique est *régulier* si pour tout ouvert U tel que $x \in U$, il existe un ouvert V tel que

$$x \in V \subset \bar{V} \subset U. \tag{B.4}$$

Proposition B.7. *Un espace compact et séparé est régulier.*

Proposition B.8. *Dans un espace régulier, les ouverts réguliers forment une base.*

Démonstration. Si U est ouvert et $x \in U$, il existe V

$$x \in V \subset \bar{V} \subset U.$$

Comme

$$V \subset V^{-\circ} \subset V^{-\circ-} \subset \bar{V},$$

on a

$$x \in V^{-\circ} \subset V^{-\circ-} \subset U.$$

Or $V^{-\circ}$ est régulier. ■

B.2 Connexité et discontinuité

Dans cette section, nous introduisons différentes notions de connexité et non connexité qu'un espace topologique peut satisfaire.

Définition B.9. Un espace topologique X est *connexe* si ses seuls ouverts-fermés sont $\emptyset$ et X.

Par extension, une partie E d'un espace topologique X est *connexe* si elle est connexe pour la topologie induite.

Les *composantes connexes* d'un espace topologique X sont ses parties connexes maximales.

Définition B.10. Un espace topologique est *totalement discontinu* s'il ne possède pas de partie connexe non trivial, i.e. si l'ensemble vide et les singletons sont ses seuls parties connexes.

Remarque B.11. Un espace est totalement discontinu si et seulement si ses composantes connexes sont des singletons.

Si on se rappelle que les composantes connexes d'un espace sont des fermés, on a le résultat suivant.

Proposition B.12. *Un espace totalement discontinu est accessible*

Définition B.13. Un espace topologique X est *totalement séparé* si pour tous x, y tels que $x \neq y$, il existe un ouvert-fermé U tel que $x \in U$ et $y \notin U$.

Remarque B.14. Étant donné un espace topologique X, on peut définir une relation d'équivalence $\sim$ sur X par $x \not\sim y$ si il existe un ouvert-fermé U tel que $x \in U$ et $y \notin U$. Les classes d'équivalence sont appelées *quasi-composantes connexes* et contiennent les composantes connexes.

Un espace est totalement séparé si et seulement si ses quasi-composantes connexes sont des singletons.

Les deux propositions suivantes sont évidentes.

Proposition B.15. *Un espace totalement séparé est séparé.*

Proposition B.16. *Un espace totalement séparé est totalement discontinu.*

La démonstration de la proposition suivante est plus compliqué et peut être trouvée dans [13].

Proposition B.17. *Un espace compact, séparé et totalement discontinu est totalement séparé.*

Proposition B.18. *Un espace compact et totalement séparé possède une base d'ouverts-fermés.*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout fermé F et $x \notin F$, il existe un ouvert-fermé U contenant x et disjoint de F. Pour tout $y \in F$, il existe un ouvert-fermé U_y tel que $x \in U_y$ et $y \notin U_y$. Comme F est compact, il existe $y_1, \ldots, y_n \in F$ tels que F soit disjoint de

$$U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}.$$

L'ensemble U est un ouvert-fermé contenant x. ■

Définition B.19. Un espace topologique est *extrêmement discontinu* si l'adhérence de tout ouvert est ouverte.

Proposition B.20. *Un espace séparé et extrêmement discontinu est totalement séparé.*

Démonstration. Soient x, y deux points distincts. Il existe des ouverts U et V disjoints tels que $x \in U$ et $y \in V$. L'ensemble $\bar{U}$ est un ouvert-fermé contenant x et ne contenant pas y car disjoint de V. ■

Annexe C

Treillis et algèbres de Boole

Nous rappelons ici quelques définitions et propriétés concernant les treillis. Les démonstrations sont disponibles dans [6], lequel traite le sujet en profondeur.

C.1 Treillis

Les treillis peuvent être défini de deux manières équivalentes. Les deux points de vue ont leur intérêt.

Définition C.1 (Treillis comme structures algébriques)**.** Un *treillis* est une structure algébrique L munie de deux opérations, $\vee$ et $\wedge$, satisfaisant aux axiomes suivants.

(L1) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$,	(associativité)	(L5) $a \vee a = a$,	(idempotence)
(L2) $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$,		(L6) $a \wedge a = a$,	
(L3) $a \vee b = b \vee a$,	(commutativité)	(L7) $a \vee (a \wedge b) = a$,	(absorption)
(L4) $a \wedge b = b \wedge a$,		(L8) $a \wedge (a \vee b) = a$.	

Exemple. L'ensemble des parties d'un ensemble X muni des opérations union et intersection est un treillis.

L'ensemble des ouverts d'un espace topologique muni de l'union et de l'intersection est un treillis.

Définition C.2 (Treillis comme ensembles ordonnés)**.** Un *treillis* est un ensemble ordonné L tel que toute partie finie et non vide $T \subset L$ admette des bornes supérieure et inférieure, notées respectivement $\bigvee T$ et $\bigwedge T$.

Exemple. L'ensemble des parties d'un ensemble X, ordonnés par inclusion est un treillis.

L'ensemble des ouverts d'un espace topologique ordonnés par inclusion est un treillis.

Étant donné un treillis vu comme une structure algébrique, on a $a \vee b = b$ si et seulement si $a \wedge b = a$. On peut définir une relation d'ordre $\leq$ sur le treillis par $a \leq b$ si et seulement si $a \vee b = b$. L'ensemble ordonné ainsi défini est une treillis au sens des ensembles ordonnés. Étant donné un treillis vu comme un ensemble ordonné, on peut définir des opérations $\vee$ et $\wedge$ par $a \vee b = \bigvee\{a, b\}$ et $a \wedge b = \bigwedge\{a, b\}$. La structure algébrique obtenue est un treillis au sens algébrique. Ces constructions sont inverses l'une de l'autre.

Définition C.3. Un treillis L est *borné* s'il existe des constantes 0 et 1 telles que $a \vee 0 = a = a \wedge 1$ pour tout $a \in L$. C'est équivalent à demander $0 \leq a \leq 1$ pour tout $a \in L$.

Proposition C.4. *Dans un treillis borné L, on a $a \wedge 0 = 0$ et $a \vee 1 = 1$ pour tout $a \in L$.*

Définition C.5. Un treillis L est *complet* si toutes les parties $S \subset L$ admettent des bornes supérieure et inférieure.

En particulier, un treillis complet est borné car $\bigvee \emptyset$ et $\bigwedge \emptyset$ jouent le rôle de 0 et de 1.

Exemple. Les treillis des exemples précédents sont complets (pour le treillis des ouverts, $\bigwedge S$ est donné par $(\bigcap S)^\circ$).

C.2 Treillis distributifs et booléens

On peut mettre des conditions supplémentaires sur un treillis, afin de correspondre aux treillis apparaissant en topologie ou en logique.

Définition C.6. Un treillis L est *distributif* s'il satisfait

(D1) $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$,

(D2) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Il est en fait suffisant de demander $a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ ou $a \vee (b \wedge c) \geq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$.

Définition C.7. Étant donné un élément $a \in L$ d'un treillis borné et distributif, un élément $b \in L$ est un *complément* de a si $a \vee b = 1$ et $a \wedge b = 0$. On peut montrer que le complément est unique. Si a a un unique complément, on le dénote par $\neg a$.

Un treillis est *complémenté* si tout élément admet un complément.

Exemple. Le treillis $\mathcal{P}(X)$ est distributif et complémenté.

L'ensemble des ouverts d'un espace topologique est distributif mais n'est pas complémenté.

Proposition C.8. *Soit L un treillis complémenté, on a*

(i) $\neg 0 = 1$ *et* $\neg 1 = 0$,

(ii) $\neg\neg a = a$

(iii) $a \wedge b = 0$ *équivaut à* $b \leq \neg a$ *et* $a \vee b = 1$ *équivaut à* $\neg a \leq b$.

Nous introduisons la notion d'algèbre de Boole. L'ouvrage [10] constitue une bonne introduction aux algèbres de Boole.

Définition C.9. Un treillis distributif et complémenté est dit *booléen* (on parle aussi d'*algèbre de Boole*). Il est utile d'avoir une définition plus algébrique de cette notion.

Une *algèbre de Boole* est une structure algébrique $(B, 0, 1, \neg, \vee, \wedge)$, avec 0 et 1 des constantes, $\neg$ un opérateur unaire et $\vee$, $\wedge$ des opérateurs binaires, satisfaisant aux axiomes (L1) à (L8), $a \vee 0 = a$, $a \wedge 1 = a$, (D1)-(D2), $a \vee \neg a = 1$ et $a \wedge \neg a = 0$. Bien sûr, cette structure satisfait aux propriétés des propositions C.4 et C.8, ainsi que les lois de de Morgan ($\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ et $\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$).

L'algèbre de Boole composée des seuls éléments 0 et 1 est notée **2**. Il s'agit de l'objet initial dans la catégorie des algèbres de Boole.

On note **BA** la catégorie dont les objets sont les algèbres de Boole et dont les morphismes sont les applications conservant les opérations $0, 1, \neg, \vee, \wedge$.

Exemple. À nouveau, l'ensemble des parties d'un ensemble est une algèbre de Boole. C'est aussi le cas de l'ensemble des ouverts-fermés d'un espace topologique quelconque. Nous verrons plus loin que toute algèbre de Boole est en fait isomorphe à une algèbre de cette forme.

Proposition C.10. *Si B est une algèbre de Boole complète et $P, Q \subset B$, on a*

(i) $(\bigvee P) \wedge (\bigvee Q) = \bigvee_{p \in P, q \in Q}(p \wedge q)$ *et* $(\bigwedge P) \vee (\bigwedge Q) = \bigwedge_{p \in P, q \in Q}(p \vee q)$,

(ii) $\neg (\bigvee P) = \bigvee_{p \in P} \neg p$ *et* $\neg (\bigwedge P) = \bigwedge_{p \in P} \neg p$.

C.3 Idéaux et filtres

Nous introduisons maintenant les notions d'idéaux et de filtres, qui sont utiles pour démontrer le théorème de dualité de Stone. Bien que nous ne démontrerons pas la dualité de Stone dans cette annexe, nous citons quelques résultats partiels qu'il est intéressant d'avoir en tête avant d'aborder les deux premiers chapitres.

Définition C.11. Une partie non vide $I \subset L$ d'un treillis L est un *idéal* si

(I1) $a, b \in I$ implique $a \vee b \in I$,

(I2) $a \leq b$ et $b \in I$ impliquent $a \in I$.

On définit un filtre de manière duale. Un ensemble non vide $F \subset L$ est un *filtre* si

(F1) $a, b \in F$ implique $a \wedge b \in F$,

(F2) $a \leq b$ et $a \in F$ impliquent $b \in F$.

Un idéal est *propre* s'il est différent de L, i.e. s'il ne contient pas 1. Pareillement, un filtre est *propre* s'il est différent de L, i.e. s'il ne contient pas 0.

Exemple. Dans le treillis $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble $\{S \subset X : x \in S\}$ pour un $x \in X$ est un filtre.
Dans un treillis d'ouverts, l'ensemble des voisinages d'un point est un filtre.

Définition C.12. Un idéal propre I d'un treillis L est *premier* si pour tous $a, b \in L$, $a \wedge b \in I$ implique $a \in I$ ou $b \in I$. Un filtre *premier* est défini de manière duale.

Proposition C.13. *L'idéal I est premier si et seulement si I^c est un filtre premier.*

Définition C.14. Un idéal propre d'un treillis est *maximal* s'il est maximal parmi les idéaux propres. On définit duallement la notion de filtre maximal, aussi appelé *ultrafiltre*.

Les notions d'idéaux premiers et maximaux sont liés, comme le montre le résultat suivant.

Théorème C.15. *Soit L un treillis distributif avec un 1. Alors tout idéal maximal est premier.*

Dans une algèbre de Boole, le résultat peut être renforcé.

Théorème C.16. *Si I est un idéal propre d'une algèbre de Boole, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) I est maximal,

(ii) I est premier,

(iii) pour tout $a \in B$, on a $a \in I$ si et seulement si $\neg a \in I$.

Nous terminons cette section par un théorème d'existence pour les idéaux premiers.

Théorème C.17. *Soit L un treillis distributif. Alors*

(i) étant donné un idéal I et un filtre F tels que $I \cap F = \emptyset$, il existe un idéal premier J tel que $I \subset J$ et $J \cap F = \emptyset$,

(ii) étant donné $a \not\leq b$, il existe un idéal premier I tel que $a \notin I$ et $b \in I$.

C.4 Théorème de représentation de Stone

Le dernier résultat que nous mentionnons est un résultat phare dans l'étude des algèbres de Boole.

Définition C.18. Un *espace de Stone* est un espace topologique compact, séparé et totalement discontinu, ou de manière équivalente, compact et totalement séparé.

Exemple. Tout espace discret fini est un espace de Stone.
L'espace de Cantor est un espace de Stone.

Théorème C.19 (Stone)**.** *La catégorie des espaces de Stone est duale à la catégorie des algèbres de Boole.*

Démonstration. Étant donné une algèbre de Boole B, on définit une topologie sur l'espace de ses ultrafiltres $\mathfrak{U}(B)$ par $\{\upsilon(a) : a \in B\}$ où

$$\upsilon(a) = \{F \in \mathfrak{U}(B) : a \in F\}$$

On peut vérifier que cet espace est de Stone.
Étant donné un espace de Stone, l'ensemble de ses ouverts-fermés $\mathfrak{OF}(X)$ est une algèbre de Boole. On peut vérifier que les deux constructions sont inverses l'une de l'autre. ■

Remarque C.20. On peut montrer que les algèbres de Boole complètes correspondent aux espaces de Stone extrêmement discontinus.

Index

Catégories

Top	Espaces topologiques et fonctions continues
Haus	Espaces séparés et fonctions continues
KHaus	Espaces compacts et séparés et fonctions continues
eKHaus	Espaces compacts, séparés et extrêmement discontinus et fonctions continues
$\mathbf{KHaus}^{\mathsf{R}}$	Espaces compacts et séparés et relations fermées
Frm	Frames et homomorphismes de frames
KRFrm	Frames compacts et régulier et homomorphismes de frames
$\mathbf{KRFrm}^{\mathsf{R}}$	Frames compacts et régulier et prémorphismes de frames
DeV	Algèbres de de Vries et morphismes d'algèbres de de Vries
dDeV	Algèbres de de Vries discrètes et morphismes d'algèbres de de Vries
$\mathbf{Gle}^{\mathsf{R}}$	Espaces de Gleason et relations stables fermées
cBA	Algèbres de Boole complètes et morphismes d'algèbres de Boole
BA	Algèbres de Boole et morphismes d'algèbres de Boole

Bibliographie

[1] BEZHANISHVILI, G. *et al.* Compact Hausdorff spaces with relations and Gleason spaces. *Applied Categorical Structures*. 2019, 27 (6), p. 663-686. ISSN 15729095. Disp. à l'adr. DOI : 10.1007/s10485-019-09573-x.

[2] BEZHANISHVILI, Guram. Stone duality and Gleason covers through de Vries duality. *Topology and its Applications*. 2010, 157 (6), p. 1064-1080. ISSN 01668641. Disp. à l'adr. DOI : 10.1016/j.topol.2010.01.007.

[3] BEZHANISHVILI, Guram. De Vries algebras and compact regular frames. *Applied Categorical Structures*. 2012, 20 (6), p. 569-582. ISSN 09272852. Disp. à l'adr. DOI : 10.1007/s10485-011-9252-5.

[4] BEZHANISHVILI, Guram *et al.* Irreducible equivalence relations, Gleason spaces, and de Vries duality. *Applied Categorical Structures*. 2017, 25 (3), p. 381-401. ISSN 15729095. Disp. à l'adr. DOI : 10.1007/s10485-016-9434-2.

[5] BOURBAKI, Nicolas. Structures topologiques. *In* : BOURBAKI, Nicolas. *Éléments de mathématique*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2007, chap. 1, p. 1-127. ISBN 978-3-540-33982-3. Disp. à l'adr. DOI : 10.1007/978-3-540-33982-3_1.

[6] DAVEY, B. A. et H. A. PRIESTLEY. *Introduction to Lattices and Order*. 2e éd. Cambridge : Cambridge University Press, 2002. Disp. à l'adr. DOI : 10.1017/cbo9780511809088. ISBN 978-0-511-80908-8.

[7] DE VRIES, Hendrik. *Compact Spaces and Compactifications : An Algebraic Approach*. Thèse de doct. University of Amsterdam. Disp. à l'adr. <https://www.illc.uva.nl/Research/Publications/Dissertations/HDS-23-Hendrik_de_Vries.text.pdf>. Amsterdam, 1962.

[8] FREYD, Peter J. et Andre SCEDROV. *Categories, Allegories*. Amsterdam : North-Holland, 1990. (North-Holland Mathematical Library ; 39). ISBN 978-0-444-70368-2.

[9] GIERZ, G. *et al. Continuous Lattices and Domains*. Cambridge : Cambridge University Press, 2003. Disp. à l'adr. DOI : 10.1017/CBO9780511542725. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications ; 93). ISBN 978-0-511-54272-5.

[10] GIVANT, Steven et Paul HALMOS. *Introduction to Boolean Algebras*. New York : Springer-Verlag, 2009. Disp. à l'adr. DOI : 10.1007/978-0-387-68436-9. (Undergraduate Texts in Mathematics). ISBN 978-0-387-40293-2.

[11] GLEASON, Andrew M. Projective topological spaces. *Illinois Journal of Mathematics*. 1958, 2 (4), p. 482-489. ISSN 00192082. Disp. à l'adr. DOI : 10.1215/ijm/1255454110.

[12] ISBELL, John R. Atomless parts of spaces. *Mathematica Scandinavica*. 1972, 31 (1), p. 5-32. ISSN 0025-5521. Disp. à l'adr. DOI : 10.7146/math.scand.a-11409.

[13] JOHNSTONE, P.T. *Stone Spaces*. Cambridge : Cambridge University Press, 1986. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics ; 3). ISBN 978-0-521-33779-3.

[14] JUNG, Achim, Mathias KEGELMANN et M. Andrew MOSHIER. Stably compact spaces and closed relations. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*. 2001, 45 (3), p. 209-231. ISSN 15710661. Disp. à l'adr. DOI : 10.1016/S1571-0661(04)80964-2.

[15] LAWVERE, F. William et Stephen H. SCHANUEL. *Conceptual Mathematics : A First Introduction to Categories*. 2e éd. Cambridge : Cambridge University Press, 2009. Disp. à l'adr. DOI : 10.1017/cbo9780511804199. ISBN 978-0-511-80419-9.

[16] MAC LANE, Saunders. *Categories for the Working Mathematician.* 2e éd. New York : Springer-Verlag, 1978. Disp. à l'adr. DOI : `10.1007/978-1-4757-4721-8`. (Graduate Texts in Mathematics ; 5). ISBN 978-0-387-98403-2.

[17] MUNKRES, James R. *Topology.* 2e éd. London : Prentice-Hall, 2000. ISBN 0-13-181629-2.